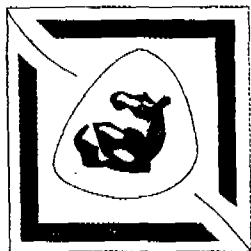


517/519(015)  
К 65

Министерство образования Российской Федерации  
Таганрогский государственный радиотехнический  
университет



Естественно-гуманитарный  
факультет

**УНТЦ ЕГФ**

Кафедра  
высшей математики

Фирсов И.П., Цирулик В.Г.,  
Сапунцов Н.Е., Клово А.Г.,  
Гадельшин В.К.

**РИТМ ВМ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**  
по  
курсу высшая математика  
(II часть)

Таганрог 2000

Составители: Фирсов И.П., Цирулик В.Г.,  
Сапунцов Н.Е., Клово А.Г., Гадельшин В.К.

УДК 517(07.07)

Конспект лекций по курсу высшая математика (II часть) /  
Таганрогский радиотехнический ун-т. Сост. Фирсов И.П.,  
Цирулик В.Г., Сапунцов Н.Е., Клово А.Г.,  
Гадельшин В.К. Таганрог, 2000, 200 с.

Конспект лекций по курсу высшая математика  
рекомендуется в качестве учебного пособия для студентов  
второго курса ТРТУ всех технических специальностей. В  
нем рассматриваются теоретические вопросы и примеры в  
соответствии с рабочей программой.

# функции комплексного переменного

## §1. Понятие функции комплексного переменного. Предел, непрерывность функции

С некоторыми функциями комплексного переменного мы уже встречались (см. §2 гл.1, ч.1). Дадим теперь общее определение функции комплексного переменного. Рассмотрим множество  $E$  комплексных чисел  $z = x + iy$ , лежащих в комплексной плоскости ( $z$ ), и множество  $G$  комплексных чисел  $w = u + iv$ , лежащих в комплексной плоскости ( $w$ ) (см. рис. 1).

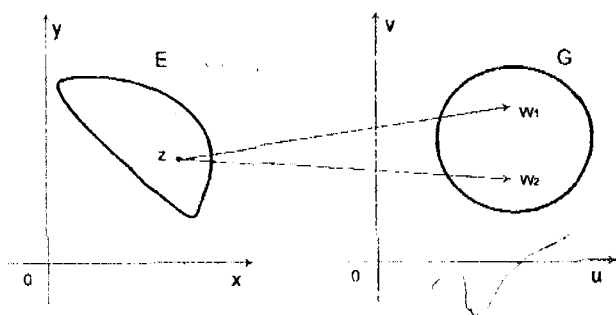


Рис. 1

**определение 1.** Если каждому комплексному числу  $z \in E$  поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел множества  $G$ , то говорят, что на множестве  $E$  задана однозначная или многозначная функция комплексного переменного. Пишут  $w = f(z)$ .

Множество  $E$  называют областью определения функции, а множество  $G$  - множеством значений функции.

Согласно определению 1 каждой паре действительных чисел  $(x, y) = z$  поставлена в соответствие пара действительных чисел  $(u, v) = w$ . Иными словами, на множестве  $E$  заданы две вещественные функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  двух вещественных переменных, т. е. одна функция комплексного переменного  $w = f(z)$  эквивалентна двум вещественным функциям, при этом  $w = u(x, y) + iv(x, y)$ .

Приведем несколько примеров.

**Пример 1.**

$$w = z^3 = (x + iy)^3 = (x^3 - 3y^2x) + i(3x^2y - y^3) \Rightarrow u = x^3 - 3y^2x, \\ v = 3x^2y - y^3. \text{ Эта функция однозначная.}$$

**Пример 2.**  $w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right).$

Эта функция многозначная ( $n$ -значная).

**Пример 3.**  $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \arg z + 2\pi k i.$

Эта функция бесконечнозначная. Все эти функции заданы на всей комплексной плоскости, исключая бесконечно удаленную точку  $z = \infty$ . Последняя функция не определена еще и в точке  $z_0 = 0$ . Заметим, что бесконечно удаленная точка  $z = \infty$  на комплексной плоскости единственная.

Говорят, что функция  $w = f(z)$  отображает множество  $E$  в множество  $G$ .

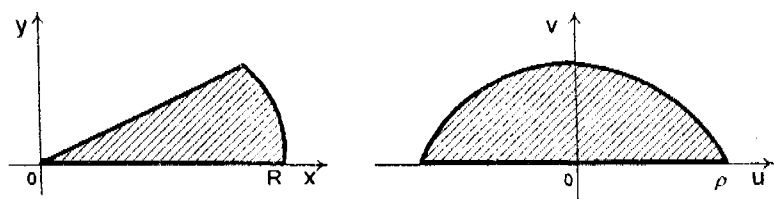


Рис. 2

Пусть  $E$  - круговой сектор:  $r < R$ ,  $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$ . Найдем

область  $G$ , в которую отобразит функция  $w = z^3$  область  $E$ .

Пусть  $z = re^{i\varphi}$ , тогда  $w = z^3 = r^3 e^{3i\varphi} = \rho e^{i\psi} \Rightarrow \rho = r^3, \psi = 3\varphi$ .

Отсюда ясно, что функция  $w = z^3$  отображает сектор  $E$  в верхний полукруг радиуса  $\rho = R^3$  (см. рис. 2).

Пусть областью определения функции  $w = z^2$  является полоса  $0 < \operatorname{Re} z < a$ . Найдем образ линии  $x = a$ , т.е. кривую, в которую она отображается функцией  $w = z^2$ .

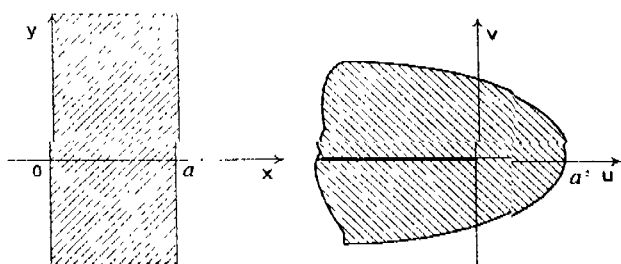


Рис. 3

Запишем уравнение прямой  $x = a$  в комплексном виде:

$z = a + it$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  - параметр.

Тогда

$$w = z^2 = (a + it)^2 = a^2 - t^2 + i2at,$$

$$u = a^2 - t^2, v = 2at, t \in (-\infty, \infty). \quad (1)$$

Уравнения (1) являются параметрическими уравнениями образа линии  $x = a$ . Исключив параметр  $t$ , получим

$u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$ , т.е. образом линии  $x = a$  является парабола.

При  $a \rightarrow 0$   $u \rightarrow -t^2$ ,  $v \rightarrow 0$ , т.е. прямая  $x = 0$  отображается в отрицательную полуось. Полоса  $0 < \operatorname{Re} z < a$  отображится,

очевидно, в часть плоскости внутри параболы с разрезом по отрицательной полуоси (см. рис. 3).

Рассмотрим последовательность комплексных чисел

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots \quad (2)$$

**Определение 2.** Число  $z_0$  называется пределом последовательности (2), если  $|z_n - z_0| = \rho(z_n, z_0) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ .

Если  $z_n = x_n + iy_n$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ , то из определения 2 следует

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $y_n \rightarrow y_0$  при  $n \rightarrow \infty$ . (3)

Очевидно и обратное утверждение, если выполняется (3), то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ .

Если  $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$ ,  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ ,  $z_n \neq 0$ ,  $z_0 \neq 0$ , то  $r_n \rightarrow r_0$ ,  $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $z_n \rightarrow z_0$ . (4)

**Определение 3.** Число  $w_0$  называется *пределом* функции  $w = f(z)$  в точке  $z_0$ , если для всякой последовательности аргумента  $\{z_n\}$ , сходящейся к  $z_0$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(z_n)\}$  сходится к  $w_0$ . Пишут  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ .

Подчеркнем, что если предел функции существует, то он не зависит ни от способа, ни от пути стремления последовательности  $\{z_n\}$  к точке  $z_0$ .

Если  $z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ ,

$$w_0 = u_0 + iv_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \rho e^{i\psi},$$

то из существования предела  $w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  следует

существование следующих пределов:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = v_0, \quad (5)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \rho = \rho_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \psi = \psi_0, \quad (w_0 \neq 0, w_0 \neq \infty). \quad (6)$$

Если  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , то функция называется *непрерывной* в точке  $z_0$ .

## §2. Производная функции комплексного переменного.

### Понятие аналитической функции

Пусть однозначная функция  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  определена в некоторой окрестности точки  $z$ . Выберем точку  $z + \Delta z$  из этой окрестности, вычислим  $f(z + \Delta z)$  и найдем приращение функции  $f(z)$  в точке  $z$ .

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v, \quad \text{где } \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

**Определение 1.** Если существует предел  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ , то он

называется производной функции  $f(z)$  в точке  $z$ . Пишут

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (1)$$

Функция, имеющая производную в точке  $z$ , называется дифференцируемой в этой точке.

**Теорема 1.** Если функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  дифференцируема в точке  $z$ , то в этой точке справедливы соотношения Эйлера-Даламбера

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

**Доказательство.** По условию теоремы существует предел (1), не зависящий от способа стремления  $\Delta z$  к нулю. Поэтому положим  $\Delta z = \Delta x$  и найдем предел (1).

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Полагая  $\Delta z = i\Delta y$ , аналогично из (1) получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получим (2). Теорема доказана.

**Следствие.** Если условия (2) не выполняются в некоторой точке, то функция  $f(z)$  недифференцируема в этой точке.

Доказательство от противного.

**Теорема 2.** Если функции  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  дифференцируемые в некоторой точке, а их частные производные удовлетворяют условиям (2), то функция  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  дифференцируемая в этой точке, причем производную функцию можно найти по формуле (3) или (4) (без доказательства).

**Пример 1.** Доказать, что производная функции  $w = z^3$  существует в любой точке  $z \neq \infty$ .

**Решение.** Проверим условия теоремы 2.

$$w = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3).$$

Так как функции  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $v(x, y) = 3x^2y - y^3$  имеют непрерывные частные производные, то они дифференцируемые (см. §3 гл.6, ч.1). Найдем частные

$$\text{производные } \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy,$$



$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$ . Как видно, условия (2) выполняются в любой

точке  $z \neq \infty$  и согласно теореме 2 производная функции  $w = z^3$  существует. Воспользуемся (3), получим

$$(z^3)' = u'_x + iv'_x = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3(x + iy)^2 = 3z^2. \quad \text{Итак,}$$

$$(z^3)' = 3z^2.$$

Можно убедиться, что  $(z^n)' = nz^{n-1}$ ,  $n \in N$ .

**Пример 2.** Найти производные функций  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ .

**Решение.** Ранее (см. §5 гл.5, ч.1) мы определяли эти

функции следующим образом:  $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ,

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Поскольку степенные ряды можно почленно

дифференцировать, то получим  $(e^z)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = e^z$ ,

$$(\sin z)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cos z,$$

$$(\cos z)' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin z.$$

Из приведенных примеров видно, что если функция дифференцируемая, то формулы дифференцирования функции действительной переменной остаются в силе и для функции комплексного переменного. Правила дифференцирования (дифференцирование суммы, произведения и пр.) также остаются прежними.

**Пример 3.** Найти производную функции  $w = f(z) = \operatorname{Re} z + 2i \operatorname{Im} z = x + 2iy$ .

**Решение.** Проверим условия (2).  $u'_x = 1$ ,  $v'_y = 2i$ . Условия (2) не выполняются ни в одной точке. Согласно следствию теоремы 1 данная функция не дифференцируемая ни в одной точке.

**Пример 4.** Найти производную функции  $f(z) = z \cdot |z|$ .

**Решение.** Проверим условия (2).  $u = x\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  
 $v = y\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $u'_x = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $v'_y = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Как видно,

условия (2) не выполняются для всякой точки  $z \neq 0$ . При  $z = 0$ , согласно определению 1, найдем

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z \cdot |\Delta z|}{\Delta z} = 0.$$

Таким образом, данная функция имеет производную только в точке  $z = 0$ .

**Определение 2.** Однозначная функция, имеющая производную не только в данной точке, но и в некоторой ее окрестности, называется аналитической в данной точке. Функция, аналитическая в каждой точке некоторой области, называется аналитической в этой области.

Например, функции  $z^3$ ,  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  аналитические на всей комплексной плоскости ( $z \neq \infty$ ), а функция  $w = z \cdot |z|$  не является аналитической ни в одной точке, хотя и дифференцируемая в нуле. Функция, аналитическая во всей комплексной плоскости ( $z \neq \infty$ ), называется *целой (голоморфной)*.

Например,  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  - целые функции.

Многочлен  $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  называется *целой рациональной функцией*. Отношение двух целых функций называется *мероморфной функцией*, а отношение двух многочленов называется *дробнорациональной функцией*.

### §3. Геометрический смысл производной

Пусть функция  $w = f(z)$  отображает некоторую окрестность точки  $z_0$  в окрестность точки  $w_0$  и всякую дугу  $\gamma$  в дугу  $\Gamma$ .

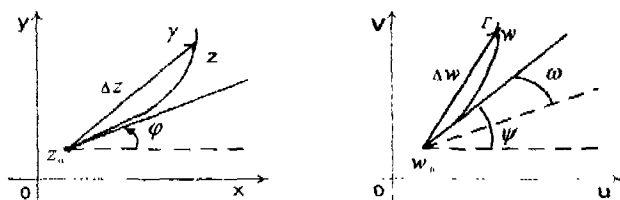


Рис. 4

Пусть  $f'(z_0) \neq 0$ ,  $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ . (1)

Из (1) следуют следующие два равенства (см. (6) §1)

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg f'(z_0), \quad (2)$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = |f'(z_0)|. \quad (3)$$

Запишем равенство (2) в виде

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \arg f'(z_0) \quad (2')$$

и дадим его геометрическую интерпретацию.  $\arg \Delta z$  — это угол наклона секущей, проходящей через точки  $z_0$  и  $z$ , а  $\arg \Delta w$  — угол наклона секущей, проходящей через точки  $w_0$  и  $w$ . Т.к. предельное положение секущей есть касательная, то (2') можно переписать так:

$$\psi - \varphi = \omega = \arg f'(z_0), \quad (4)$$

где  $\psi$  и  $\varphi$  углы наклона соответствующих касательных (см. рис. 4). Из (4) ясен геометрический смысл аргумента производной. Это угол поворота касательной при

отображении  $w = f(z)$ . Поскольку производная не зависит от того, по какой кривой  $z$  стремится к  $z_0$ , то ясно, что все бесконечно малые дуги, выходящие из точки  $z_0$ , при отображении функций  $f(z)$  поворачиваются на один и тот же угол  $\omega = \arg f'(z_0)$ , если  $f'(z_0) \neq 0$ .

**Следствие.** Угол между кривыми, проходящими через точку  $z_0$ , при отображении аналитической функцией  $f(z)$  не изменяется, если  $f'(z_0) \neq 0$ .

Рассмотрим геометрический смысл равенства (3). Модули разности  $|z - z_0| = |\Delta z|$  и  $|w - w_0| = |\Delta w|$  есть расстояния между точками  $z$  и  $z_0$ ,  $w$  и  $w_0$  соответственно. Поэтому

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k - \text{коэффициент растяжения (сжатия)}$$

бесконечно малой дуги в точке  $z_0$  при отображении функцией  $f(z)$ .

Отображение, осуществляемое аналитической функцией, называют *конформным* в точке, в которой производная отлична от нуля. Если  $f'(z) \neq 0$  в каждой точке области  $E$ , то аналитическая функция  $f(z)$  осуществляет конформное отображение области  $E$  на область  $G$ .

**Пример.** Рассмотрим отображение  $f(z) = z^3 - 3z$ . Производная  $f'(z) = 3(z^2 - 1)$  обращается в нуль только в точках  $z_1 = 1, z_2 = -1$ , следовательно, отображение конформно всюду, исключая точки  $z_{1,2} = \pm 1$ .  $f'(i) = -6$ , это означает, что бесконечно малые дуги, проходящие через точку  $z = i$ , при отображении функцией  $f(z) = z^3 - 3z$  поворачиваются на угол  $\pi$  и растягиваются в шесть раз.

## §4. Интеграл от функции комплексной переменной

Пусть некоторая плоская кривая задана параметрически  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Умножая  $y(t)$  на  $i$  и складывая с  $x(t)$ , получим уравнение этой кривой в комплексном виде  $z(t) = x(t) + iy(t)$ . Пусть некоторая дуга  $\gamma = A\bar{B}$  лежит на этой кривой, причем точке  $A$  на этой дуге отвечает значение параметра  $t = t_0$ , а точке  $B$  -  $t = t_1$ .

Под интегралом от функции  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  по дуге  $\gamma$  будем понимать число, определяемое следующим выражением

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy. \quad (1)$$

Из (1) видно, что интеграл от функции комплексного переменного определяется двумя криволинейными интегралами второго рода. Поэтому, если криволинейные интегралы второго рода существуют, то существует и интеграл от функции комплексного переменного. Все свойства криволинейного интеграла второго рода справедливы и для интеграла (1). В частности он зависит от направления движения по дуге  $\gamma$ .

Если дуга  $\gamma$  гладкая, то интеграл (1) легко сводится к определенному

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (2)$$

**Пример 1.** Найдите интеграл от функции  $f(z) = \operatorname{Re} z + 2i \operatorname{Im} z = x + 2iy$

а) по отрезку прямой, соединяющей начало координат с точкой (1;1):

б) по отрезку параболы  $y = x^2$ , проходящей через эти точки.

**Решение.** Запишем уравнение прямой и параболы в комплексной форме:  $z = (1+i)t$ ,  $t \in [0;1]$ ;  $z = (t+it^2)$ ,  $t \in [0;1]$ .

Используя (2), получим:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_0^1 (t+2it)(1+i) dt = (1+2i)(1+i) \cdot \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} (-1+3i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_0^1 (t+2it^2)(1+2it) dt = \left( \frac{1}{2} t^2 - t^4 + \frac{4}{3} it^3 \right) \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} i. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить  $\oint \frac{dz}{(z-z_0)^n}$ , где  $C$  - окружность радиуса  $R$  с центром в  $z_0$ , которая обходится в положительном направлении один раз,  $n$  - целое число.

**Решение.** Запишем уравнение окружности в комплексном виде

$$x - x_0 = R \cos t, \quad y - y_0 = R \sin t \Rightarrow z = z_0 + Re^{it}, \quad t \in [0; 2\pi].$$

Согласно (2), имеем

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{R^n e^{int}} dt = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt = \\ &= \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что интеграл не зависит ни от радиуса  $R$  окружности, ни от точки  $z_0$ .

**Теорема 1 (Коши).** Пусть в односвязной области  $E$  задана аналитическая функция  $f(z)$ . Тогда интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру  $C$ , целиком лежащему в области  $E$ , равен нулю, т. е.

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy = 0. \quad (3)$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулой Грина

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (4)$$

(см. §8 гл.9, ч.1). Из (3) и (4) следует

$$\oint_C f(z) dz = \iint_{E'} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{E'} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

так как согласно условиям Эйлера-Даламбера подынтегральные выражения двойных интегралов обращаются в нуль. Здесь  $E' \subset E$  — область, ограниченная контуром  $C$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Теорема Коши справедлива и в том случае, когда контур  $C$  совпадает с границей области  $E$ , если дополнительно потребовать непрерывность функции  $f(z)$  в замкнутой области  $\bar{E}$ .

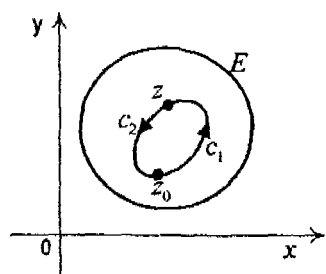


Рис 5

Пусть замкнутый контур  $C$  лежит в односвязной области  $E$ , в которой функция  $f(z)$  аналитическая. Пусть  $z_0$  — некоторая фиксированная точка, а  $z$  — текущая точка на контуре  $C$  (см. рис. 5).

Тогда, согласно свойствам интеграла и теореме 1,

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = 0,$$

$$\text{или } \int_{c_1} f(z) dz = \int_{-c_2} f(z) dz. \quad (5)$$

Здесь  $c_1$  означает дугу  $z_0 c_1 z$ ,  $c_2$  — дугу  $z c_2 z_0$ , а  $(-c_2)$  — дугу  $z_0 c_2 z$ . Равенство (5) означает, что значение интеграла не зависит от пути интегрирования, а только от начальной  $z_0$  и конечной  $z$  точек интегрирования.

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z). \quad (6)$$

Можно убедиться, что функция  $F(z)$  является первообразной функцией для функции  $f(z)$ , а интеграл (6) удовлетворяет всем свойствам интеграла с переменным верхним пределом от действительной функции.

**Пример 3.** Найти интеграл  $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ .

**Решение.** Функция  $\frac{1}{z}$  аналитическая в комплексной плоскости ( $z$ ), исключая  $z=0$ . Плоскость с разрезом по отрицательной полуоси будет односвязной областью, в которой функция  $\frac{1}{z}$  аналитическая. Тогда, согласно (6),

$$\text{получим } \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z.$$

**Теорема 2.** Если функция  $f(z)$  аналитическая в многосвязной области  $E$ , ограниченной контурами  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ , то

$$\oint_{c_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{c_k} f(z) dz, \quad (7)$$



где  $c_0$  — внешняя граница области  $E$ ,  
 $c_1, c_2, \dots, c_n$  — внутренние контуры, ограничивающие  
 область  $E$ . Все контуры  
 обходятся против стрелки  
 часов.

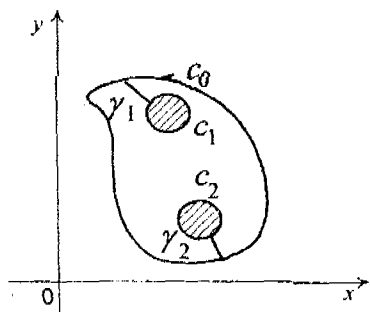


Рис. 6

**Доказательство.** Соединим  
 внешний контур  $c_0$  с  
 внутренними контурами  
 кривыми  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ . Тогда  
 многосвязная область  $E$  станет  
 односвязной (см. рис. 6).

Согласно теореме 1 и замечанию к ней, имеем

$$\int_{c_0} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{c_k} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz = 0. \quad (8)$$

Вся граница односвязной области проходимся в  
 положительном направлении, т.е. так, что область остается  
 слева (внешний контур  $c_0$  против часовой стрелки,  $c_k$  — по  
 часовой стрелке). Кривые  $\gamma_k$  проходятся дважды в разных  
 направлениях, поэтому сумма интегралов по этим кривым  
 равна нулю. Меняя направление обхода внутренних  
 контуров, получим (7). Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть функция  $f(z)$  аналитическая в  
 односвязной области  $E$  и непрерывна в  $\bar{E}$ . Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{E}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (9)$$

где  $z_0 \in E$  (без доказательства).

Формулу (9) называют интегральной формулой Коши.

**Следствие.** В условиях теоремы 3 справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что аналитическая функция дифференцируема сколько угодно раз. Заметим, что (10) можно получить формальным дифференцированием (9) по параметру  $z_0$ .

**Пример 4.** Вычислить  $\oint_{z=i} \frac{\sin z}{z-i} dz$ , если а)  $r < 1$ , б)  $r > 1$ .

**Решение.**

а) функция  $\frac{\sin z}{z-i}$  аналитическая внутри круга  $|z| = r < 1$ .

Поэтому, согласно теореме Коши,  $\oint_{|z|<1} \frac{\sin z}{z-i} dz = 0$ .

б) функция  $f(z) = \sin z$  аналитическая внутри круга  $|z| = r > 1$ , точка  $z_0 = i$  внутри этого круга, поэтому, согласно формуле (9),

$$\oint_{|z|>1} \frac{\sin z}{z-i} dz = 2\pi i \sin i = -2\pi sh1.$$

Итак,  $\oint_{|z|=r} \frac{\sin z}{z-i} dz = \begin{cases} 0, & \text{если } r < 1, \\ -2\pi sh1, & \text{если } r > 1. \end{cases}$

**Упражнение.** Вычислить  $\oint_{z=2} \frac{e^{2z} dz}{(z+i)^3}$ .

## §5. Ряды Тейлора и Лорана

Рядом Тейлора для функции  $f(z)$ , как известно,

$$\text{называется степенной ряд } f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1)$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (2)$$

Согласно теореме Абеля (см. §5 гл.5, ч.1) областью сходимости ряда (1) является круг радиуса  $R$ . При этом, если  $R \neq 0$ , то внутри круга сходимости ряд сходится к своей сумме равномерно и его можно почленно дифференцировать сколько угодно раз. Знак соответствия в (1) вместо знака равенства стоит потому, что не ясно, совпадает ли сумма ряда с функцией  $f(z)$ , для которой он формально записан. Этот вопрос проясняет следующая теорема.

**Теорема 1.** Если функция  $f(z)$  аналитическая внутри круга  $|z - z_0| < R$ , то она разлагается в ряд Тейлора, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (\text{без доказательства}).$$

**Замечание 1.** Используя формулу (10) §4, коэффициенты ряда Тейлора можно записать иначе

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (3)$$

Здесь  $c$ - произвольный замкнутый контур, охватывающий точку  $z_0$  и лежащий внутри круга сходимости.

**Теорема 2.** Всякий степенной ряд с отличным от нуля радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

**Доказательство.** Пусть степенной ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = f(z)$  сходится к своей сумме  $f(z)$  в круге

$|z - z_0| < R \neq 0$ . Т.к. степенной ряд можно почленно дифференцировать, то для  $k$ -ой производной получим

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

Отсюда, при  $n = k$  и  $z = z_0$  найдем  $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$ , или

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \text{ что совпадает с (2). Теорема доказана.}$$

**Замечание 2.** Из теоремы 2 следует, что сумма степенного ряда является функцией аналитической внутри круга сходимости.

Если  $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ ,

$f^{(k)}(z_0) \neq 0$ , то ряд Тейлора функции  $f(z)$  в окрестности точки  $z_0$  будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - z_0)^m = \\ &= (z - z_0)^k \cdot \varphi(z), \quad \varphi(z_0) \neq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Точка  $z_0$  в этом случае называется нулем кратности  $k$ .

Из теоремы 1 и 2 следует, что функция  $f(z)$  будет аналитической в точке  $z_0$  только в том случае, если в окрестности точки  $z_0$  она разлагается в ряд Тейлора. В противном случае функция не будет аналитической в точке  $z_0$ , и эта точка называется *особой*. Примерами особых точек являются точки разрыва и точки, в окрестности которых нельзя выделить однозначную функцию (они называются точками ветвления). Например, для

функции  $f(z) = \frac{1}{z} \sqrt{z+1}$  особыми точками являются: точка разрыва  $z_1 = 0$ , точка ветвления  $z_2 = -1$ .

Чтобы определить характер бесконечно удаленной точки  $z = \infty$ , делают замену  $z = \frac{1}{\zeta}$ . Тогда точка  $z = \infty$

отображается в точку  $\zeta = 0$ . При этом, если функция  $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  аналитическая в точке  $\zeta = 0$ , то и функция  $f(z)$

аналитическая в точке  $z = \infty$ . Если  $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  имеет особенность при  $\zeta = 0$ , то такую же особенность имеет функция  $f(z)$  при  $z = \infty$ . В нашем примере

$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sqrt{\zeta(1+\zeta)}$ . В точке  $\zeta = 0$  функция  $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  имеет

точку ветвления, следовательно функция  $f(z) = \frac{1}{z} \sqrt{z+1}$  в точке  $z = \infty$  имеет точку ветвления.

**Определение.**

Ряд  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$  (5)

называется рядом Лорана.

Первая его часть  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  называется регулярной

частью, а вторая  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$

называется главной частью ряда Лорана.

Регулярная часть является степенным рядом и область его сходимости - некоторый круг  $|z - z_0| < R$ . В главной части

сделаем замену  $\frac{1}{z - z_0} = \zeta$ . Тогда относительно  $\zeta$  получим

степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n$ . Областью его сходимости также

является некоторый круг  $|\zeta| < R_1$  или  $\frac{1}{|z - z_0|} < R_1$ ,

$$|z - z_0| > \frac{1}{R_1} = r.$$

Если  $r < R$ , то общей областью сходимости регулярной и главной частей ряда Лорана является кольцо  $r < |z - z_0| < R$ . Итак, областью сходимости ряда Лорана (5) является кольцо.

**Теорема 3.** Если функция  $f(z)$  аналитическая в кольце  $r < |z - z_0| < R$ , то она разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (6)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad r < \rho < R \quad (7)$$

(без доказательства).

Если  $r = 0$ , то кольцо превращается в круг радиуса  $R$  с выколотым центром. Если функция  $f(z)$  аналитическая в этом круге, но неаналитическая в точке  $z_0$ , то ряд (6) в этом случае называется рядом Лорана функции  $f(z)$  в окрестности особой точки  $z_0$ .

**Пример.** Разложить функцию  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$  в ряд Лорана.

**Решение.** Функция  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$  аналитическая во всей комплексной плоскости, исключая точки  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 3$ .

1. Рассмотрим круг  $|z| < 2$ . В нем функция  $f(z)$  аналитическая и согласно теореме 1 разлагается в ряд

$$\text{Тейлора } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \left( \left( \frac{1}{z-3} \right)^{(n)} - \left( \frac{1}{z-2} \right)^{(n)} \right) \Bigg|_{z=0} =$$

$$= \frac{1}{n!} \left( \frac{(-1)^n n!}{(z-3)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(z-2)^{n+1}} \right) \Bigg|_{z=0} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}.$$

2. В кольце  $2 < z < 3$  данная функция аналитическая и поэтому, согласно теореме 3, разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Найти коэффициенты  $c_n$  по формуле (7) не просто. Лучше воспользоваться формулой суммы бесконечно убывающей

геометрической прогрессии  $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ,  $|q| < 1$ .

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}. \quad (8)$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}. \quad (9)$$

Вычитая из (8) (9), получим ряд Лорана

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^n c_n z^n,$$

$$c_n = -\frac{1}{3^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad c_n = -\frac{1}{2^{n+1}}, \quad n = -1, -2, \dots$$

3. В области  $|z| > 3$ , т.е. в окрестности бесконечно удаленной точки аналогично получим следующий ряд

$$\text{Лорана } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}, \quad c_n = 3^{n-1} - 2^{n-1}. \text{ Убедиться в}$$

этом самостоятельно.

## §6. Классификация особых точек.

### Вычеты

Особая точка функции  $f(z)$  называется *изолированной*, если существует ее окрестность, в которой нет других особых точек функции  $f(z)$ . Мы будем рассматривать конечные изолированные особые точки однозначного характера (не точки ветвления). Функция аналитическая в выколотой окрестности такой точки разлагается в ряд Лорана.

**Определение 1.** Особая точка называется *устранимой*, если главная часть разложения в ряд Лорана в окрестности этой точки отсутствует; *полюсом*, если главная часть ряда Лорана содержит конечное число членов; *существенно особой*, если главная часть разложения содержит бесконечное число членов.



**Пример 1.**  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ . Очевидно,  $z = 0$  — особая точка.

Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки.

$$f(z) = \frac{1}{z} \sin z = \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Как видно, главная часть ряда Лорана отсутствует, поэтому согласно определению точка  $z_0 = 0$  является устранимой особенностью.

**Пример 2.**  $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ . Особая точка  $z_0 = 0$ .

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z} + \frac{z}{4!} - \dots$$

Главная часть ряда Лорана  $\left( \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z} \right)$  содержит два члена, поэтому точка  $z_0 = 0$  является полюсом. *Порядком полюса*

называют наибольшую степень выражения  $\frac{1}{z - z_0}$ . В

нашем случае полюс третьего порядка.

**Пример 3.**  $f(z) = e^{z-1}$ . Особая точка  $z_0 = 1$ .

$$f(z) = e^{z-1} = 1 + \frac{z-1}{1!} + \frac{1}{2!} \left( \frac{z-1}{1} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{z-1}{1} \right)^3 + \dots$$

Как видно, главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, поэтому  $z_0 = 1$  — существенно особая точка.

**Теорема.** Если предел  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  конечный, то  $z_0$  является устранимой особой точкой; если предел бесконечный, то

$z_0$  – полюс; если предела не существует, то  $z_0$  – существенно особая точка (без доказательства).

**Упражнение.** Проверить теорему на примерах 1-3.

Если  $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ , т.е. точка  $z_0$  – нуль кратности  $k$ , то для функции  $\frac{1}{f(z)}$  эта точка является, очевидно, полюсом кратности  $k$ .

**Пример 4.**  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)^3}$ .

Очевидно,  $z_1 = 1$  – простой полюс,  $z_2 = -3$  – полюс третьего порядка.

**Определение 2.** Вычетом функции  $f(z)$  в изолированной особой точке  $z_0$  называют число, определяемое

$$\text{интегралом } \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = \text{Res } f(z_0). \quad (1)$$

Здесь  $\gamma$  – произвольный замкнутый контур, содержащий внутри себя только одну особую точку  $z_0$ .

Сравнивая (1) с формулой (7) §5, видим, что  $\text{Res } f(z_0) = c_{-1}$ . Из примеров 1-3 следует, что

$$\text{Res}_{z_0=0} \frac{\sin z}{z} = 0, \quad \text{Res}_{z_0=0} \frac{\cos z}{z^3} = -\frac{1}{2}, \quad \text{Res}_{z_0=1} e^{z^2} = 2. \quad (2)$$

Дадим более удобный метод вычисления вычета в полюсах. Пусть функция  $f(z)$  имеет в точке  $z_0$  полюс  $k$ -го порядка.

Тогда

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

Умножим обе части последнего равенства  $(z-z_0)^k$ .

$$(z - z_0)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + c_0(z - z_0)^k + \dots \quad (3)$$

Если продифференцировать равенство (3)  $(k-1)$  раз, то свободный член в правой части будет равен  $(k-1)!c_{-1}$ .

Следовательно,  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)) = (k-1)!c_{-1}$ , или

$$c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)) = \operatorname{Res} f(z_0). \quad (4)$$

В частности, если полюс простой, т.е.  $k=1$ , то из (4) получим

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0) f(z)) = \operatorname{Res} f(z_0). \quad (5)$$

Если  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , где  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$ ,

$\psi'(z_0) \neq 0$ , т.е. точка  $z_0$  является простым нулем знаменателя, то из (5) получим

$$\operatorname{Res} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (6)$$

**Пример 5.** Найти вычет функции  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)^3}$  в точке  $z_0 = 1$ .

**Решение.** Используя (5), найдем

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{(z+3)^3} = \frac{1}{64}.$$

## §7. Вычисление интегралов с помощью вычетов

Из определения вычета следует

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_0), \quad (1)$$

т.е., зная вычет функции  $f(z)$  в точке  $z_0$ , мы можем вычислить интеграл по замкнутому контуру, содержащему внутри себя только одну изолированную особую точку  $z_0$ .

**Теорема 1** (основная теорема о вычетах). Если функция  $f(z)$  аналитическая всюду в замкнутой области  $\bar{E}$  за исключением конечного числа изолированных особых точек  $z_k$  однозначного характера, лежащих внутри контура  $c_0$ , то

$$\oint_{c_0} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k), \quad (2)$$

где  $c_0$  — граница области  $E$ .

**Доказательство.** Выделим каждую особую точку замкнутым контуром  $c_k$ , содержащим только одну особую точку  $z_k$ , и воспользуемся теоремой 2 §4. В результате

$$\text{получим} \quad \oint_{c_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{c_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k).$$

Теорема доказана.

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $I = \oint_{|z|=2} e^{\frac{2}{z-1}} dz$ .

**Решение.** Особая точка  $z_0 = 1$  лежит внутри контура  $|z| = 2$ , поэтому, согласно (1) или (2), получим

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(e^{\frac{2}{z-1}}) = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i \quad (\text{см. (2) §6}).$$

Определенный интеграл  $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx$ , где  $R(x)$  —

дробно рациональная функция, с помощью замены  $z = e^{ix}$  сводится к интегралу по замкнутому контуру от функции комплексного переменного, который можно вычислить с помощью вычетов.

**Пример 2.** Вычислить  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$ .

**Решение.**

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 4 \cos x} &= \left| \begin{array}{l} z = e^{ix}, \quad dz = ie^{ix} dx = iz dx, \\ \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \end{array} \right| = \\ &= -i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 + 5z + 2} = \left| \begin{array}{l} 2z^2 + 5z + 2 = 0 \\ z_1 = -2, \quad z_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \right| = \\ &= -i \cdot 2\pi i \operatorname{Res} f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

**Лемма 1.** Пусть функция  $f(z)$  аналитическая в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$  всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек. Если в точке  $z = \infty$  функция  $f(z)$  имеет нуль не ниже второго порядка, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} f(z) dz = 0, \quad (3)$$

где  $c_r$  — верхняя часть окружности  $z = re^{i\varphi}$ .

**Доказательство.** Очевидно,  $\lim_{z \rightarrow \infty} (z \cdot f(z)) = 0$  или

$|zf(z)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$  при  $|z| > R$ . На окружности  $z = re^{i\varphi}$  получим

$|zf(z)| = |re^{i\varphi} f(re^{i\varphi})| < \frac{\varepsilon}{\pi}$  при  $r > R$ . Оценим интеграл

$$\int_{c_r} f(z) dz.$$

$$\left| \int_{c_r} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi f(re^{i\varphi}) ire^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \int_0^\pi |f(re^{i\varphi})| r d\varphi \leq \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\pi d\varphi = \varepsilon.$$

Итак,  $\left| \int_{c_r} f(z) dz \right| < \varepsilon$  при  $r > R$ . Это означает, что (3)

выполняется, и лемма доказана

**Теорема 2.** Если функция  $f(z)$  удовлетворяет условиям леммы 1, то главное значение несобственного интеграла можно найти по формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k), \quad (4)$$

где  $z_k$  — особые точки в верхней полуплоскости.

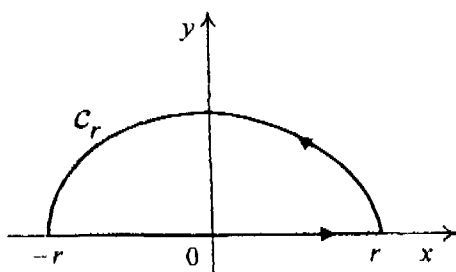


Рис. 7

Доказательство:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \int_{-r}^r f(x) dx + \int_{c_r} f(z) dz \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{c_r} f(z) dz = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(z_k) \quad (\text{см. рис. 7}). \end{aligned}$$

Воспользовались леммой 1 и теоремой 1. Теорема доказана.

**Замечание.** Если функция  $f(z)$  имеет только простые полюса на действительной оси, то к вычетам (4) следует добавить вычеты в этих полюсах, уменьшенные в два раза.

**Пример 3.** Вычислить интеграл  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)dx}{x(x^2+1)}$ .

**Решение.** Подынтегральная функция удовлетворяет лемме 1, поэтому согласно (4) и замечанию, получим  $I = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) + \pi i \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \pi$ .

**Лемма 2 (Жордан).** Пусть функция  $f(z)$  является аналитической во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа изолированных точек и равномерно относительно  $\arg z$  стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} f(z) e^{tz} dz = 0. \quad (5)$$

Здесь  $c_r$  – верхняя часть окружности  $|z| = r$ , если  $t > 0$ , и нижняя, если  $t < 0$  (без доказательства).

**Теорема 3.** Если функция  $f(z)$  удовлетворяет лемме 2, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pm 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}_{z=z_k} (f(z) e^{tz}). \quad (6)$$

Знак плюс в (6) берется, если  $t > 0$ , а особые точки  $z_k$  в верхней полуплоскости. Знак минус – если  $t < 0$ , а  $z_k$  в нижней полуплоскости.

Доказать теорему 3 самостоятельно, см. доказательство теоремы 2.

Замечание к теореме 2 справедливо и для теоремы 3.

**Пример 4.** Вычислить  $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 4}$ .

**Решение.**

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (2\pi i \operatorname{Res}_{z=2i} \left( \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} \right)) = \frac{\pi}{4e^2}.$$

**Лемма 3 (Жордан).** Если функция  $f(z)$  аналитическая во всей комплексной плоскости за исключением конечного числа изолированных точек и равномерно относительно  $\arg z$  стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{c_r} f(z) e^{tz} dt = 0. \quad (7)$$

Здесь  $c_r$  — часть окружности  $|z| = r$ , для точек которой выполняется неравенство  $\operatorname{Re} z \leq s_0$ , если  $t > 0$  (см. рис. 8). Если  $t < 0$ , то  $c_r$  — другая часть этой же окружности, для точек которой  $\operatorname{Re} z \geq s_0$  (без доказательства).

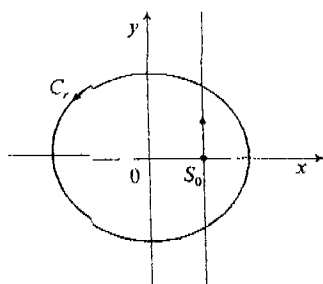


Рис. 8

Лемма 3 дает возможность вычислять с помощью вычетов

несобственные интегралы вида  $\int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} f(z) e^{tz} dz$ . (8)

**Пример 5.** Вычислить интеграл  $I = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tz} dz}{z(z-2)(z^2+1)}$ .



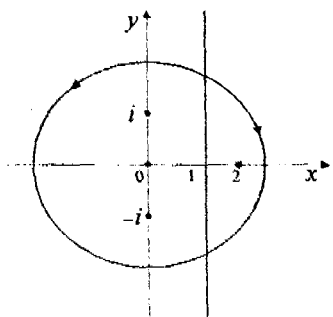


Рис. 9

**Решение.**

**Функция**

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)(z^2+1)}$$

удовлетворяет лемме 3. Точки  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 2$ ,  $z_{3,4} = \pm i$  являются полюсами этой функции. Пусть  $t > 0$ .

Тогда, замыкая контур интегрирования влево (см. рис. 9) и пользуясь основной

теоремой о вычетах, получим

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i (\operatorname{Res}_{z_1=0}(f(z)e^{tz}) + \operatorname{Res}_{z_0=2}(f(z)e^{tz}) + \operatorname{Res}_{z_4=-i}(f(z)e^{tz})) = \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cos t - \frac{2}{5} \sin t\right). \end{aligned}$$

При  $t < 0$  контур интегрирования замыкаем влево. В результате получим

$$I = -2\pi i \operatorname{Res}_{z_2=2}(f(z)e^{tz}) = -\frac{\pi i}{5} e^{2t}.$$

$$\text{Итак, } I = \frac{1}{5} \pi i \begin{cases} -5 + 4 \cos t - 4 \sin t, & \text{если } t > 0, \\ -e^{2t}, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

## **Глава 2. Операционное исчисление**

### **§1. Преобразование Лапласа, основные понятия**

Пусть функция  $f(t, p)$  для всякого комплексного  $p \in E$  является кусочно непрерывной по действительной переменной  $t \in [a, \infty)$ .

**Определение 1.** Сходящийся несобственный интеграл  $\int_a^\infty f(t, p) dt$ , зависящий от параметра  $p$ , называется *равномерно сходящимся* в области  $E$ , если

$$\sup_{p \in E} \left| \int_R^\infty f(t, p) dt \right| \rightarrow 0$$

при  $R \rightarrow \infty$ . (Сравнить с определением равномерной сходимости ряда, см. §4 гл. 5, ч.1).

**Теорема 1 (признак Вейерштрасса).** Если  $|f(t, p)| \leq \varphi(t)$

$\forall p \in E$ , а интеграл  $\int_a^\infty \varphi(t) dt$  сходится, то интеграл

$\int_a^\infty f(t, p) dt = I(p)$  сходится равномерно в области  $E$  (без доказательства).

**Теорема 2.** Если функция  $f(t, p)$  аналитическая в области

$E$ , а несобственный интеграл  $\int_a^\infty f(t, p) dt = I(p)$  сходится равномерно в области  $E$ , то функция  $I(p)$  является

аналитической в области  $E$ , при этом  $I'(p) = \int_a^\infty f'(t, p) dt$

(без доказательства).

**Определение 2.** Комплекснозначная функция  $f(t)$  называется *оригиналом*, если она обладает следующими свойствами:

- 1)  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ ;
- 2) при  $t \geq 0$   $f(t)$  – кусочно-непрерывная функция;
- 3) функция имеет ограниченный рост, т.е.  $\exists M > 0, s_1 > 0: (|f(t)| < Me^{s_1 t} \forall t \in [0, \infty))$ .

Очевидно, если  $|f(t)| < M \cdot e^{s_1 t}$ , то  $|f(t)| < M \cdot e^{st} \forall s > s_1$ .

Нижняя грань  $s_0$  всех таких  $s$ , при которых выполняется неравенство, называется *показателем роста функции*  $f(t)$ .

Например, функция Хевисайда  $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$  является

оригиналом. Функции  $\sin t \cdot \eta(t)$ ,  $e^{3t} \eta(t)$  - оригиналы, а функции  $tgt \cdot \eta(t)$ ,  $e^{3t^2} \eta(t)$  не являются оригиналами.

**Определение 3.** Функция  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$  называется изображением функции  $f(t)$  по Лапласу или преобразованием Лапласа. Пишут  $f(t) \xrightarrow{\cdot} F(p)$  или  $L(f(t)) = F(p)$ ,  $L$  - оператор Лапласа.

**Теорема 3.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом, то

$$\text{интеграл } \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = F(p) \quad (1)$$

сходится для всех  $\operatorname{Re} p > s_0$ , где  $s_0$  - показатель роста функции  $f(t)$ , и определяет аналитическую в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$  функцию  $F(p)$ .

**Доказательство.** Поскольку  $f(t)$  - оригинал, то  $|f(t)| < M \cdot e^{s_0 t}$ . Оценим подинтегральную функцию интеграла (1).

$$|f(t)e^{-pt}| \leq M |e^{(s_0 - \operatorname{Re} p)t}| \cdot e^{i \operatorname{Im} p t} \leq M \cdot e^{(s_0 - s)t}, \quad (2)$$

где  $s = \operatorname{Re} p$ . Зафиксируем некоторое  $s > s_0$ , тогда получим функцию  $\varphi(t) = M \cdot e^{(s_0 - s)t}$  такую, что  $|f(t)e^{-pt}| \leq \varphi(t)$ ,

причем  $\int_0^{\infty} \varphi(t) dt$  сходится. Действительно,

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) dt = \frac{M}{s_0 - s} e^{(s_0 - s)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{M}{s - s_0}, \text{ если } s > s_0. \text{ По признаку}$$

Вейерштрасса интеграл (1) сходится равномерно. А так как подынтегральная функция является аналитической, то из теоремы 2 следует, что функция  $F(p)$  аналитическая в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Если  $F(p)$  – изображение некоторого оригинала, то  $F(p) \rightarrow 0$  при  $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$ . Действительно, из теоремы 3 следует

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt < \frac{M}{\operatorname{Re} p - s_0} \rightarrow 0 \quad \text{при}$$

$\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$ .

Следствие доказано.

**Теорема 4.** Если функция  $f(t)$  является оригиналом, а  $F(p)$  его изображение, то в любой точке непрерывности оригинала имеет место формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (3)$$

где  $s > s_0$ . В точках разрыва правая часть (3) равна полусумме пределов слева и справа, т.е.

$$\frac{1}{2} (f(t-0) + f(t+0)) \text{ (без доказательства).}$$

Формулу (3) называют обратным преобразованием Лапласа, а формулу (1) – прямым.

Найдем изображения некоторых оригиналов.

1. Пусть  $f(x) = \eta(t)$  — единичная функция Хевисайда.

$$\text{Согласно (1), имеем } F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p},$$

если  $\operatorname{Re} p > 0$ . Итак,  $\eta(t) \longrightarrow \frac{1}{p}$ .

2. Пусть  $f(t) = e^{at} \cdot \eta(t)$ ,  $a = \alpha + \beta i$ . Согласно (1), имеем

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{a-p} e^{(a-p)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}, \text{ если } \operatorname{Re} p > \alpha.,$$

$\alpha = s_0$  есть показатель роста данного оригинала. Итак,

$$\eta(t)e^{at} \longrightarrow \frac{1}{p-a}.$$

**Замечание.** Поскольку все оригиналы равны нулю при  $t < 0$ , то их следует записывать так:  $\eta(t)f(t)$ . Однако, ради сокращения записи множитель  $\eta(t)$  обычно опускают, но его всегда подразумевают.

## §2. Свойства преобразования Лапласа

**1 Линейность.** Если  $f(t) \longrightarrow F(p)$ ,  $g(t) \longrightarrow G(p)$ ,

$$\text{то } \alpha f(t) + \beta g(t) \longrightarrow \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} L(\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \int_0^{\infty} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-pt} dt = \\ &= \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt = \alpha F(p) + \beta G(p). \end{aligned}$$

**Пример 1.** Найти изображение оригинала  $\sin \omega t$ .

**Решение.**

$$\begin{aligned}\sin \omega t &= \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

Воспользовались линейностью и результатом примера 2

$$\S 1. \text{ Аналогично найдем } \cos \omega t \longrightarrow \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

**2. Смещение изображения.** Если  $f(t) \longrightarrow F(p)$ , то  $e^{\lambda t} f(t) \longrightarrow F(p - \lambda)$ , где  $\lambda$  — произвольное комплексное число.

$$\text{Действительно, } L(e^{\lambda t} f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(p-\lambda)t} dt = F(p - \lambda).$$

**Пример 2.** Найти изображение оригинала  $e^{\lambda t} \sin \omega t$ .

**Решение.** Поскольку  $\sin \omega t \longrightarrow \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ , то

$$e^{\lambda t} \sin \omega t \longrightarrow \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}.$$

$$\text{Аналогично найдем } e^{\lambda t} \cos \omega t \longrightarrow \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}.$$

**3. Запозывание оригинала.** Если  $f(t) \longrightarrow F(p)$ , то  $f(t - \tau) \longrightarrow e^{-p\tau} F(p)$ , где  $\tau > 0$ . Действительно,

$$\begin{aligned}L(f(t - \tau)) &= L(\eta(t - \tau) f(t - \tau)) = \\ &= \int_0^{\tau} 0 \cdot e^{-pt} dt + \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt =\end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{l} t - \tau = u \\ dt = du \end{array} \right| = \int_0^{\infty} f(u) e^{-p(u+\tau)} du = e^{-p\tau} F(p).$$

**Пример 3.** Найти изображение единичного импульса длительности  $\tau$  (см. рис. 10).

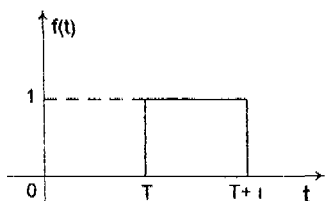


Рис. 10

**Решение.**

$$f(t) = \eta(t - T) - \eta(t - \tau - T).$$

$$\text{Тогда } F(p) = \frac{1}{p} e^{-pT} - \frac{1}{p} e^{-(T+\tau)p}.$$

#### 4. Дифференцирование изображения.

Если  $f(t) \longrightarrow F(p)$ , то  $-t f(t) \longrightarrow F'(p)$ .

Действительно,  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-px} dt$ . Согласно теореме 2

$$\S 1, \quad F'(p) = \int_0^{\infty} (-t f(t)) e^{-pt} dt, \quad \text{а это означает, что}$$

$-t f(t) \longrightarrow F'(p)$ . Обобщая это свойство, найдем

$$(-1)^n t^n f(t) \longrightarrow F^{(n)}(p).$$

**Пример 4.** Найти изображение  $t^n$ .

$$\text{Решение. } \eta(t) \longrightarrow \frac{1}{p},$$

$$(-1)^n t^n \eta(t) \longrightarrow \left( \frac{1}{p} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Итак,  $t^n \longrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$ . Аналогично найдем

$$t^n e^{at} \longrightarrow \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

**5. Дифференцирование оригинала.** Если

$f(t) \longrightarrow F(p)$  и  $f'(t)$  — оригинал, то

$f'(t) \longrightarrow pF(p) - f(0)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} L(f'(t)) &= \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-pt}, \quad du = -pe^{-pt} dt, \\ dv = f'(t)dt, \quad v = f(t) \end{array} \right| = \\ &= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

Обобщая это свойство, запишем

$$f^{(n)}(t) \longrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

**Пример 5.** Решить задачу Коши:  $x'' + x' = 1$ ,  $x'(0) = x(0) = 0$ .

**Решение.** Пусть  $x(t) \longrightarrow \bar{x}(p)$ , тогда

$x'(t) \longrightarrow p\bar{x}(p)$ ,  $x''(t) \longrightarrow p^2\bar{x}(p)$  и вместо

дифференциального уравнения получим алгебраическое

$$p^2\bar{x} + p\bar{x} = \frac{1}{p}.$$

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \Rightarrow x(t) = e^{-t} + t - 1 -$$

решение задачи Коши.

**6. Интегрирование оригинала.** Если  $f(t) \longrightarrow F(p)$ ,

то  $\int_0^t f(u)du \longrightarrow \frac{1}{p} F(p)$ . Действительно, пусть



$\varphi(t) = \int_0^t f(u) du \longrightarrow \Phi(p)$ . Тогда  $\varphi(0) = 0$  и по свойству 5

$$\varphi'(t) = f(t) \longrightarrow p\Phi(p) = F(p), \quad \text{т.е.} \quad \Phi(p) = \frac{1}{p}F(p).$$

Свойство доказано.

**Пример 6.** Найти переходную функцию цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивления  $R$ , емкости  $C$  и индукции  $L$  (см. рис. 11).

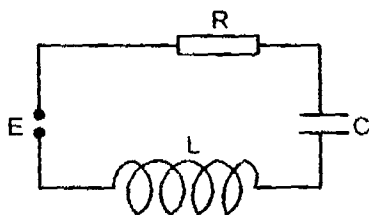


Рис. 11

**Решение.**

$$E = u_R + u_C + u_L = iR + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + L \frac{di}{dt}, \quad (1)$$

где  $i(t)$  - ток.

Переходной функцией называется отклик электрической цепи на единичное воздействие при нулевых начальных условиях. В нашем случае это решение уравнения (1) при

$$E = \eta(t), \quad i(0) = 0. \quad \text{Пусть} \quad i(t) \longrightarrow I(p).$$

Найдем изображение уравнения (1).

$$\bar{E}(p) = I(p)R + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} I(p) + LpI(p) \quad \text{или}$$

$$\bar{E}(p) = I(p) \cdot Z(p) \quad \text{— операторный закон Ома,}$$

$Z(p) = R + \frac{1}{Cp} + Lp$  — операторное сопротивление (импеданс цепи).

$I(p) = \frac{\bar{E}(p)}{Z(p)}$  — изображение тока. Чтобы найти ток (оригинал), воспользуемся теоремой обращения

$$i(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\bar{E}(p)}{Z(p)} e^{pt} dp. \quad (2)$$

В нашем случае  $\bar{E}(p) = \frac{1}{p}$ . Пусть  $L = C = 1$ ,  $R = 2$ , тогда

$Z(p) = \frac{1}{p(p+1)^2}$ . Подставляя все это в (2), получим

$$\text{переходную функцию } i_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{pt}}{(p+1)^2} dp. \quad (3)$$

Согласно теореме 3 §1 изображение является аналитической функцией в правой полуплоскости. Поэтому в интеграле (3)  $S$  выберем таким, чтобы все особые точки подынтегральной функции были левее прямой  $x = S$ . Используя лемму 3 и основную теорему о вычетах (см. §7, гл.1), вычислим интеграл (3)

$$i(t) = \begin{cases} \operatorname{Res}_{p=-1} \left( \frac{e^{pt}}{(p+1)^2} \right), & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases} = \begin{cases} t e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

## 7. Интегрирование

изображения.

Если  $f(t) \longrightarrow F(p)$  и  $\frac{f(t)}{t}$  — оригинал, то

$$\frac{f(t)}{t} \longrightarrow \int_p^\infty F(q) dq. \text{ Действительно, пусть } \frac{f(t)}{t} \longrightarrow \Phi(p).$$

Тогда по свойству 4 получим  $-t \cdot \frac{f(t)}{t} \longrightarrow \Phi'(p)$  или

$f(t) \longrightarrow -\Phi'(p) = F(p)$ . Интегрируя последнее равенство,

$$\text{найдем } -\Phi(q)\Big|_p^\infty = \int_p^\infty F(q) dq \quad \text{или} \quad \Phi(p) = \int_p^\infty F(q) dq.$$

Свойство доказано.

**Пример 7.** Найти изображение оригинала  $\frac{\sin t}{t}$ .

**Решение.**  $\sin t \longrightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$ , тогда

$$\frac{\sin t}{t} \longrightarrow \int_p^\infty \frac{dq}{q^2 + 1} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

**Пример 8.** Найти изображение интегрального синуса

$$sit = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau.$$

**Решение.** Используя свойство 6 и результат примера 7,

$$\text{найдем } sit \longrightarrow \frac{\pi/2 - \operatorname{arctg} p}{p}.$$

### §3. Теоремы умножения и разложения

Сверткой двух функций  $f(t)$  и  $g(t)$  (обозначают  $f * g$ )

называют интеграл  $\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = f * g$ . Покажем, что

$$f * g = g * f.$$

Действительно,  $f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \left| \begin{matrix} t - \tau = u \\ d\tau = -du \end{matrix} \right| =$

$$= \int_0^t g(u)f(t-u)du = g * f. \text{ Свойство доказано.}$$

Отметим без доказательства, что свертка двух оригиналов является оригиналом.

**Теорема 1 (Борель).** Если  $f(t) \longrightarrow F(p)$ ,  $g(t) \longrightarrow G(p)$ ,

то  $f * g \longrightarrow F \cdot G. \quad (1)$

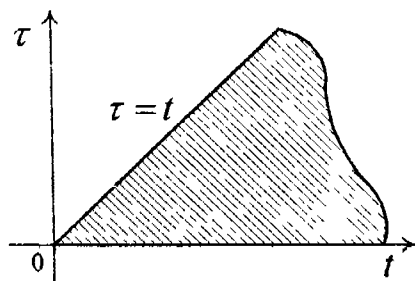


Рис. 12

**Доказательство.**

$$L(f * g) = \int_0^{\infty} \left( \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{-pt} d\tau.$$

Рассматривая этот интеграл как двойной по области, изображенной на рисунке 12, поменяем пределы интегрирования.

Получим  $L(f * g) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} t - \tau = u \\ dt = du \end{matrix} \right| =$

$$\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} g(u) e^{-p(u+\tau)} du = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} g(u) e^{-pu} du =$$

$F(p) \cdot G(p)$ . Теорема доказана.

Формула (1) носит название теоремы умножения. Итак,

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \varphi(t) \longrightarrow F(p)G(p). \quad (1')$$

Поскольку  $\varphi(0) = 0$ , то воспользовавшись свойством дифференцирования оригинала, из (1') получим

$$f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'_i(t - \tau) d\tau \longrightarrow pF(p)G(p). \quad (2)$$

Формулу (2) называют формулой Дюамеля. В силу симметрии свертки формулу (2) можно переписать иначе

$$f(t)g(0) + \int_0^t g'_i(\tau)f(t - \tau) d\tau \longrightarrow pF(p)G(p). \quad (2')$$

**Пример 1.** Переходная функция  $i_1(t)$  электрической цепи известна (см. пример 6 §2). Найти ток в этой цепи при нулевых начальных условиях и произвольной э.д.с.  $E(t)$ .

**Решение.** Запишем операторный закон Ома  $\bar{E}(p) = I(p) \cdot z(p)$ . (3)

Подставляя в (3)  $\bar{E}(p) = \frac{1}{p}$ ,  $I(p) = I_1(p)$ , где  $I_1(p)$  — изображение переходной функции  $i_1(t)$ , найдем операторное сопротивление  $z(p) = \frac{1}{pI_1(p)}$ . Зная его,

найдем из (3) изображение тока  $I(p) = \frac{\bar{E}(p)}{z(p)} = pI_1(p)\bar{E}(p)$ .

По формуле Дюамеля (2') найдем искомый ток

$$i(t) = \int_0^t i_1'(\tau) E(t - \tau) d\tau.$$

**Теорема 2 (первая теорема разложения).** Если функция  $F(p)$  разлагается в окрестности бесконечно удаленной

точки в ряд Лорана  $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$ , то она является

изображением оригинала  $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}$  (4)

(без доказательства).

**Пример 2.** Найти оригинал изображения  $F(p) = \frac{1}{p} e^{-p}$ .

**Решение.** Разложим функцию  $F(p)$  в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

$$F(p) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! p^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)! p^k}. \quad \text{Согласно}$$

теореме 2

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{((k-1)!)^2} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} t^k = I_0(2\sqrt{t}) - \text{функция}$$

Бесселя.

Если изображение  $F(p)$  – дробно рациональная функция

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{Q(p)}, \quad \text{то эта дробь правильная (см. следствие из}$$

теоремы 3 §1). Особыми точками дробно рациональной функции являются только изолированные полюсы, поэтому она удовлетворяет лемме Жордана. Отсюда ясно, что несобственный интеграл в формуле обращения можно вычислить с помощью вычетов, т.е. оригинал определяется формулой

$$f(t) = \sum_k \operatorname{Res}_{p=p_k} \left( \frac{\Phi(p)}{Q(p)} e^{pt} \right). \quad (4)$$

Здесь  $p_k$  — нули знаменателя  $Q(p)$ . Формулу (4) называют второй теоремой разложения. Она упрощается, если все нули знаменателя простые. В этом случае

$$f(t) = \sum_k \frac{\Phi(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (5)$$

**Пример 2.** По изображению  $F(p) = \frac{p+1}{p(p^2+1)}$  найти оригинал.

**Решение.** Корни знаменателя  $p_1 = 0$ ,  $p_{2,3} = \pm i$  простые, поэтому воспользуемся (5). Получим

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}(i+1)e^{it} - \frac{1}{2}(-i+1)e^{-it} = 1 + \sin t - \cos t.$$

#### §4. Применения операционного исчисления

Операционное исчисление (преобразование Лапласа) чаще всего применяется к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Пусть  $f(t)$  и неизвестная функция  $x(t)$  вместе со своими производными являются оригиналами. Тогда

$$f(t) \longrightarrow F(p), \quad x(t) \longrightarrow \bar{x}(p),$$

$$x^{(n)}(t) \longrightarrow p^{(n)} \bar{x}(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x_1 - \dots - x_{n-1}.$$

Найдем изображение уравнения (1)

$$\bar{x}(p)(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) - (p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1})x_0 - \\ - (p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2})x_1 - \dots - x_{n-1} = F(p) \text{ или} \\ \bar{x}(p)R(p) = \Phi(p) + F(p), \quad (2)$$

где  $R(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$  — характеристический многочлен уравнения (1). Как видно, вместо дифференциального уравнения (1) получили алгебраическое уравнение (2). Разрешая его, найдем изображение неизвестной функции

$$\bar{x}(p) = \frac{\Phi(p) + F(p)}{R(p)}. \quad (3)$$

Осталось по известному изображению  $\bar{x}(p)$  найти оригинал  $x(t)$  и задача будет решена.

Если изображение (3) является дробно рациональной функцией, причем  $R(p) = (p - p_1)^{l_1} (p - p_2)^{l_2} \dots (p - p_r)^{l_r}$ , то ее можно разложить на простейшие дроби

$$\bar{x}(p) = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^{l_k} \frac{a_{km}}{(p - p_k)^m}. \quad (4)$$

Поскольку  $\frac{1}{(p - p_k)^m} \longleftarrow \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{p_k t}$ , то оригиналом (4)

$$\text{будет } x(t) = \sum_{k=1}^r \sum_{m=1}^{l_k} \frac{a_{km}}{(m-1)!} t^{m-1} e^{p_k t}. \quad (5)$$

**Пример 1.** Решить уравнение  $x^{(4)} + 2x'' + x = \sin t$  с нулевыми начальными условиями.

**Решение.** В нашем случае  $\Phi(p) = 0$ ,

$$R(p) = p^4 + 2p^2 + 1 = (p^2 + 1)^2,$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \bar{x}(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^3}.$$

Найдем корни знаменателя  $p_{1,2} = \pm i$  и разложим рациональную дробь на простейшие дроби.



$$\frac{1}{(p^2+1)^3} = \frac{1}{(p-i)^3(p+i)^3} = \frac{a_{11}}{p-i} + \frac{a_{12}}{(p-i)^2} + \frac{a_{13}}{(p-i)^3} +$$

$$+ \frac{a_{21}}{p+i} + \frac{a_{22}}{(p+i)^2} + \frac{a_{23}}{(p+i)^3}.$$

Коэффициенты  $a_{km}$  находятся обычным способом

$$a_{11} = -a_{21} = \frac{3}{16i}, \quad a_{12} = a_{22} = -\frac{3}{16}, \quad a_{13} = -a_{23} = -\frac{1}{8i}.$$

Используя (5), получим

$$x(t) = \frac{3}{16i}(e^{it} - e^{-it}) - \frac{3}{16}(te^{it} + te^{-it}) - \frac{1}{8i}(t^2e^{it} - t^2e^{-it}) =$$

$$= \frac{3}{8}\sin t - \frac{3}{8}t \cos t - \frac{1}{8}t^2 \sin t.$$

**Пример 2.** Решить задачу Коши  $x'' - x = e^{-t^2}$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .

**Решение.** Пусть  $e^{-t^2} \longrightarrow F(p)$ , тогда  $\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2-1} \cdot F(p)$ .

Используя теорему умножения, найдем

$$x(t) = \int_0^t sh(t-\tau)e^{-\tau^2} d\tau.$$

Очевидно, изображением нормальной СЛДУ с постоянными коэффициентами  $\frac{dX}{dt} = AX + G(t)$  и начальным условием  $X(0) = X_0$  является СЛАУ  $p\bar{X}(p) - X_0 = A\bar{X}(p) + \bar{G}(p)$ . Если она имеет единственное решение, то его можно записать так:  $\bar{X}(p) = (pE - A)^{-1}(\bar{G}(p) + X_0)$ .

Здесь  $E$  — единичная матрица. Осталось по известному изображению найти оригинал и система дифференциальных уравнений будет решена.

Порядок некоторых дифференциальных уравнений можно понизить, если найти их изображение по Лапласу.

**Пример 3.** Решить уравнение  $t\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ ,  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Решение. Пусть  $x(t) \longrightarrow \bar{x}(p)$ , тогда  $\dot{x}(t) \longrightarrow p\bar{x}(p) - 1$ ,

$$\ddot{x}(t) \longrightarrow p^2 \bar{x}(p) - p.$$

Согласно свойству дифференцирования изображения, найдем

$$t\ddot{x}(t) \longrightarrow -(p^2 \bar{x} - p)' = -2p\bar{x} - p^2 \frac{d\bar{x}}{dp} + 1.$$

$$p^2 \frac{d\bar{x}}{dp} + (p-1)\bar{x} = 0 \quad \text{изображение} \quad \text{данного}$$

дифференциального уравнения. Получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\frac{d\bar{x}}{\bar{x}} = \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \right) dp, \quad \ln \bar{x} = -\frac{1}{p} - \ln p, \quad \bar{x} = \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}} \longleftarrow I_0(2\sqrt{t})$$

(см. пример 2 §3). Итак,  $x(t) = I_0(2\sqrt{t})$  – решение данного уравнения.

Дифференциальное уравнение вида

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t - \tau_k) + f(t), \quad (6)$$

где старшая производная неизвестной функции зависит от аргумента  $t$ , а младшие от аргумента  $t$  со сдвигом  $\tau_k \geq 0$ , называется *дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом*. Такое уравнение также можно решать операционным методом.

**Пример 4.** Решить уравнение

$$\dot{x}(t) = x(t-1) + 1, \quad x(0) = 0. \quad (7)$$

**Решение.** Найдем изображение уравнения

$$p\bar{x}(p) = \bar{x}(p) \cdot e^{-p} + \frac{1}{p},$$

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p(p - e^{-p})} = \frac{1}{p^2 \left(1 - \frac{e^{-p}}{p}\right)} = \frac{1}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-kp}}{p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-kp}}{p^{k+2}}.$$

Используя первую теорему разложения и свойство запаздывания оригинала, запишем решение данного уравнения в виде

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(t-k).$$

Операционным методом можно решать интегральные уравнения типа свертки

$$\int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau + f(t) = 0,$$

$$x(t) = \int_0^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau + f(t).$$

Здесь  $f(t)$  и  $K(t)$  – известные функции, а  $x(t)$  – искомая функция.

**Пример 5.** Решить уравнение  $x(t) = t - \int_0^t sh(t-\tau)x(\tau)d\tau$ .

**Решение.** Найдем изображение уравнения.

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - 1} \cdot \bar{x}(p).$$

$$\bar{x}(p) = \frac{p^2 - 1}{p^4} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} \leftarrow t - \frac{1}{6}t^3.$$

Итак,  $x(t) = t - \frac{1}{6}t^3$  — решение данного уравнения.

Уравнения математической физики также можно решать операционным методом.

**Пример 6.** Концы струны  $x = 0$  и  $x = \pi$  закреплены жестко. Начальное отклонение задано уравнением  $u(x, 0) = \sin x$ . Начальная скорость равна нулю. Найти отклонения струны при  $t > 0$ .

**Решение.** Отклонения струны  $u(x, t)$  определяются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

граничными условиями

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (9)$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Пусть  $u(x, t) \rightarrow \bar{u}(x, p)$ , тогда вместо (8) с учетом начальных условий (10) получим

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} p^2 \bar{u} = -\frac{P}{a^2} \sin x. \quad (11)$$

Уравнение (11) — обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее следующим граничным условиям  $\bar{u}(0, p) = \bar{u}(\pi, p) = 0$ . (9')

Решение уравнения (11) с граничными условиями (9') следующее:

$$\bar{u}(x, p) = \frac{P}{p^2 + a^2} \sin x.$$

Тогда, очевидно,  $u(x,t) = \cos at \cdot \sin x$  — решение данной задачи.

## Глава 3. Ряды и интеграл Фурье

### §1. Ортогональные системы функций

Рассмотрим множество кусочно-непрерывных функций  $x(t)$ , заданных на отрезке  $[a,b]$ . При этом в точках разрыва значением функции будем считать полусумму пределов слева и справа. Скалярное произведение двух функций этого множества  $x_i(t)$  и  $x_j(t)$  определим следующим интегралом

$$(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \int_a^b x_i(t)x_j(t)dt. \quad (1)$$

Можно убедиться, что интеграл (1) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения. Поэтому множество кусочно-непрерывных функций является евклидовым пространством. Обозначим его  $L'_2(a,b)$ .

Евклидово пространство, как известно, является одновременно метрическим и нормированным. Норма и метрика, согласованные со скалярным произведением, определяются формулами

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \quad \rho(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\|. \quad (2)$$

**Определение 1.** Последовательность элементов  $e_i$  евклидова пространства называется *ортонормированной*, если  $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$ , где  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера.

В качестве примера ортонормированной последовательности (системы) функций рассмотрим последовательность тригонометрических функций, определенных на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t, \dots, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt, \dots \quad (3)$$

Убедимся, что последовательность (3) ортонормированная. Обозначим

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mt, \quad e_{2m+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mt, \\ m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Четный индекс отвечает косинусам,} \\ \text{нечетный - синусам}).$$

Тогда

$$(e_1, e_k) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{Bmatrix} \cos kt \\ \sin kt \end{Bmatrix} dt = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{k} \begin{Bmatrix} \sin kt \\ -\cos kt \end{Bmatrix} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$k \neq 1$ .

Итак, первый член последовательности (3) ортогонален всем последующим.

$$(e_{2m}, e_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{Bmatrix} \cos mt \cos kt \\ \cos mt \sin kt \end{Bmatrix} dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{Bmatrix} \cos(m-k)t + \cos(m+k)t \\ \sin(k-m)t + \sin(k+m)t \end{Bmatrix} dt = 0, \quad \text{если } k \neq m.$$

Аналогично найдем  $(e_{2m+1}, e_k) = 0$ , если  $k \neq m$ .

$$(e_1, e_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1, \quad (e_k, e_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{Bmatrix} \cos^2 kt \\ \sin^2 kt \end{Bmatrix} dt = 1.$$

Итак, мы убедились, что последовательность (3) является ортонормированной на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Пусть на интервале  $(a, b)$  определена непрерывная функция  $\rho(t)$  такая, что

$$\int_a^b x^2(t) \rho(t) dt < \infty, \quad (4)$$

где  $x(t) \in L_2'(a, b)$  ( $\rho(t)$  называется *весовой функцией*).

Число, определяемое формулой

$$(x_i, x_j) = \int_a^b x_i(t) x_j(t) \rho(t) dt \quad (5)$$

для любых двух функций  $x_i(t), x_j(t) \in L_2'(a, b)$ , называют *скалярным произведением* этих функций с весом  $\rho(t)$ .

Если  $(x_i, x_j) = 0$ , то функции  $x_i(t)$  и  $x_j(t)$  называются *ортгоналными* с весом. Примером системы функций, ортгоналных с весом, является система многочленов Чебышева

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (6)$$

Убедимся, что система (6) ортгонална на отрезке  $[-1, 1]$  с

весовой функцией  $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ .

$$\begin{aligned} \text{Действительно, } (T_m, T_n) &= \int_{-1}^1 \frac{T_m(t) T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left| \begin{array}{l} \arccos t = \Theta \\ d\Theta = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right| = \\ &= -\int_{\pi}^0 \cos m\Theta \cos n\Theta d\Theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos(m-n)\Theta + \cos(m+n)\Theta) d\Theta = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 0,5\pi, & \text{если } m = n \neq 0, \\ \pi, & \text{если } m = n = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Из (7) видно, что многочлены Чебышева (6) ортогональны с весом, причем  $\|T_0\|^2 = \pi$ ,  $\|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $n \neq 0$ .

Можно доказать, что система функций Бесселя  $\{I_0(\mu_k t)\}_{k=1}^{\infty}$ , где  $\mu_k$  —  $k$ -й корень уравнения  $I_0(t) = 0$ , ортогональная на отрезке  $[0, 1]$  с весом  $\rho(t) = t$ , причем

$$(I_0(\mu_k t), I_0(\mu_m t)) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \frac{1}{2} I_1^2(\mu_k), & k = m. \end{cases} \quad (8)$$

Кроме приведенных выше существует множество других ортогональных систем функций, например, многочлены Лежандра, Лагерра, Якоби и др.

Упражнение. Доказать, что последовательность тригонометрических функций  $x_n(t) = \sin(2n-1)t$  ортогональна на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Нормировать эту последовательность.

## §2. Ряд Фурье, свойства

В евклидовом  $n$ -мерном пространстве существует, как известно, ортонормированный базис  $\{e_k\}_{k=1}^n$  и всякий вектор  $x$  этого пространства разлагается по этому базису

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k. \quad (1)$$



Коэффициенты разложения (координаты вектора  $x$  в этом базисе) определяются формулой

$$\alpha_k = (x, e_k). \quad (2)$$

В бесконечномерном функциональном евклидовом пространстве роль базиса играет ортонормированная последовательность функций, а конечная сумма (1) превращается в функциональный ряд.

**Определение 1.** Пусть функция  $f(t)$  и ортонормированная система функций  $\{e_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$  принадлежат евклидову пространству. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k(t) \sim f(t) \quad (3)$$

называется рядом Фурье функции  $f(t)$ , если его коэффициенты определяются формулой

$$\alpha_k = (f, e_k). \quad (4)$$

Здесь знак соответствия  $\sim$  вместо знака равенства стоит потому, что не известно, сходится ли ряд Фурье, и если сходится, то к какой функции.

Пусть  $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$  — частичная сумма ряда Фурье, а

$S_n^* = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k$  — частичная сумма другого ряда по той же

ортонормированной системе, но с другими коэффициентами. Величину  $\rho(S_n^*, f) = \|S_n^* - f\|$  называют *отклонением частичной суммы  $S_n^*$  от функции  $f(t)$* .

**Теорема 1.** Наименьшее отклонение от функции  $f(t)$  имеет частичная сумма  $S_n$  ряда Фурье.

**Доказательство.** Найдем

$$\rho^2(S_n^*, f) = \|S_n^* - f\|^2 = (S_n^* - f, S_n^* - f) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (S_n^*, S_n^*) - 2(S_n^*, f) + (f, f) = \sum_{k=1}^n \beta_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k + \|f\|^2 = \\
 &\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k)^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \|f\|^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Итак, } \rho^2(S_n^*, f) &= \|S_n^* - f\|^2 = \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k)^2 - \\
 &- \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \|f\|^2. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Поскольку в (5) все величины неотрицательные, то ясно, что квадрат отклонения  $\rho^2(S_n^*, f)$  будет наименьшим при  $\beta_k = \alpha_k$ , т.е. при  $S_n^* = S_n$ . Теорема доказана.

Поскольку  $\rho^2(S_n, f) \geq 0$ , то из (5) при  $\beta_k = \alpha_k$  получим

$$\|S_n - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \geq 0, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \leq \|f\|^2. \tag{7}$$

Из (7) видно, что частичная сумма числового ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$  с неотрицательными членами ограничена. Такой ряд сходится (см. §2 гл.5, ч.1). По необходимому признаку сходимости ряда имеем  $\alpha_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, мы доказали первое следствие.

**Следствие 1.** Коэффициенты ряда Фурье  $\alpha_k = (e_k, f)$  стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ .

Поскольку ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$  сходится, то переходя к пределу в

$$(7), \text{ получим } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leq \|f\|^2. \tag{8}$$

Неравенство (8) называется неравенством Бесселя. Из (6) получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^2(S_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2. \quad (9)$$

Равенство (9) доказывает второе следствие.

**Следствие 2.** Необходимым и достаточным условием сходимости ряда Фурье функции  $f(x)$  к этой функции по метрике (норме), согласованной со скалярным произведением, является равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2. \quad (10)$$

**Определение 2.** Ортонормированная система функций называется *полной* в евклидовом пространстве, если ряд Фурье по этой системе любой функции этого евклидова пространства сходится к данной функции по норме, согласованной со скалярным произведением.

Если ортонормированная система полная, то разложение в ряд Фурье по этой системе единственное. Отметим без доказательства, что приведенные в предыдущем параграфе ортонормированные системы функций являются полными в  $L_2'(a, b)$ . А это означает, что любую кусочно-непрерывную функцию  $f(t)$  можно разложить по этим системам функций в ряд Фурье, который будет сходиться к этой функции по норме (2) §1. Такая сходимость, как известно, называется средней квадратичной. Понимая сходимость в таком смысле, впредь будем писать знак равенства вместо знака соответствия  $\sim$ .

**Замечание.** На практике часто разлагают в ряд Фурье не по ортонормированной системе функций  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ , а по

ортогональной, но ненормированной  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(t). \quad (11)$$

Коэффициенты  $a_k$  Фурье находятся по формуле

$$a_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} (f, \varphi_k). \quad (12)$$

**Пример 1.** Разложить функцию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

по системе многочленов Чебышева  $T_n(t)$ .

**Решение.**  $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(t)$ ,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} (f, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(k \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos k\Theta d\Theta = \frac{2}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2}.$$

$$\text{Итак, } f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} T_{2k+1}(t). \quad (13)$$

**Пример 2.** Разложить функцию  $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 0,5, \\ 1, & 0,5 \leq t \leq 1 \end{cases}$

по системе функций Бесселя  $\{I_0(\mu_k t)\}_{k=1}^{\infty}$ .

**Решение.**  $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k I_0(\mu_k t)$ . Согласно (12)

$$a_k = \frac{2}{I_1^2(\mu_k)} (f, I_0(\mu_k t)) =$$

$$= \frac{2}{I_1^2(\mu_k)} \int_{0,5}^1 t I_0(\mu_k t) dt = \frac{2}{\mu_k I_1^2(\mu_k)} t I_1(\mu_k t) \Big|_{0,5}^1 =$$

$$\frac{2}{\mu_k I_1^2(\mu_k)} \left( I_1(\mu_k) - \frac{1}{2} I_1(0,5\mu_k) \right).$$

Воспользовались табличным интегралом

$$\int x I_0(x) dx = x I_1(x).$$

### §3. Тригонометрический ряд Фурье

Ряд Фурье по ортонормированной системе тригонометрических функций (3) §1 называется *тригонометрическим рядом Фурье*. В дальнейшем будем называть его просто рядом Фурье.

Чаще в тригонометрический ряд Фурье разлагают функцию не по ортонормированной системе, а по ортогональной ненормированной системе

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots \quad (1)$$

Ряд Фурье записывается в виде

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \quad (2)$$

при этом коэффициенты, согласно (12) §2 определяются формулами

$$a_k = \frac{1}{\pi} (f, \cos kt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} (f, \sin kt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Разложение (2) справедливо только на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Но поскольку правая часть (2) - функция периодическая, то продолжая функцию  $f(t)$ , заданную на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ,

периодически с периодом  $2\pi$ , добьемся того, что разложение (2) будет справедливо на всей числовой оси.

Пусть теперь функция  $f(t)$  задана на отрезке  $[-l, l]$ .

Введем замену  $t = \frac{l}{\pi}x$ . Тогда  $f(t) = f\left(\frac{l}{\pi}x\right) = \varphi(x)$ ,

$x \in [-\pi, \pi]$ . Запишем ряд Фурье для функции  $\varphi(x)$ .

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx.$$

Вернемся теперь к старой переменной  $t$ . Тогда  $x = \frac{\pi}{l}t$  и

$$\varphi(x) = f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k}{l}t + b_k \sin \frac{\pi k}{l}t, \quad (5)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx dx = \left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{l}t \\ dx = \frac{\pi}{l}dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k}{l}t dt. \quad (6)$$

$$\text{Аналогично найдем } b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k}{l}t dt. \quad (7)$$

Если функцию  $f(t)$  считать периодической с периодом  $2l$ , то разложение (5) будет справедливо на всей числовой оси.

Пусть функция  $f(t)$  задана на отрезке  $[a, b]$ . Продолжим ее периодически на всю числовую ось с периодом  $2l = b - a$ , тогда  $f(t) = f(t + 2l)$ .

Докажем, что для периодической функции с периодом  $2l = b - a$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{-l}^l f(t) dt. \quad (8)$$

Действительно, 
$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^{-l} f(t) dt + \int_{-l}^l f(t) dt + \int_l^b f(t) dt =$$

$$\int_{-l}^l f(t) dt + \int_l^{2l+a} f(t) dt + \int_a^{-l} f(t+2l) dt = \left| \begin{array}{l} t+2l = x \\ dt = dx \end{array} \right| = \int_{-l}^l f(t) dt +$$

$$= \int_l^{2l+a} f(t) dt + \int_{a+2l}^l f(x) dx = \int_{-l}^l f(t) dt.$$

Равенство (8) доказано. Учитывая, что  $\cos \frac{\pi k}{l} t$ ,  $\sin \frac{\pi k}{l} t$  также периодические функции с периодом  $2l = b - a$ , найдем, что

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi k}{l} t dt = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos \frac{2\pi k}{b-a} t dt. \quad (9)$$

Аналогично, 
$$b_k = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin \frac{2\pi k}{b-a} t dt. \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2\pi k}{b-a} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{b-a} t. \quad (11)$$

Легко убедиться, что

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \text{ нечетная,} \\ 2 \int_0^l f(x) dx, & \text{если } f(x) \text{ четная.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что четная функция разлагается в ряд Фурье только по косинусам, а нечетная - только по синусам.

**Пример.** Разложить функцию  $f(x) = x - 1$ ,  $x \in [1; 2]$  в ряд Фурье.

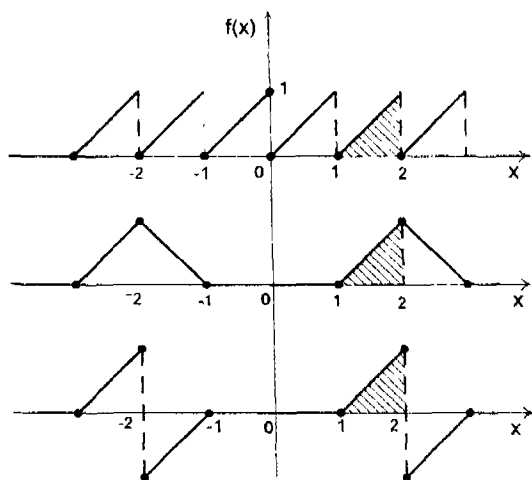


Рис. 13

**Решение.** 1-й способ. Продолжим функцию  $f(x)$  периодически с периодом  $2l = 1$  (см. рис. 13), получим

$$\text{функцию } f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx, \quad (12)$$

$$a_0 = 2 \int_1^2 (x-1) dx = 1, \quad a_k = 2 \int_1^2 (x-1) \cos 2\pi kx dx = 0,$$

$$b_k = 2 \int_1^2 (x-1) \sin 2\pi kx dx = -\frac{1}{\pi k}.$$

2-й способ. Доопределим функцию  $f(x)$  на отрезке  $[0; 1]$  нулем, продолжим ее четным образом на отрезок  $[-2; 0]$ , а затем периодически с периодом  $2l_2 = 4$ . Получим функцию  $f_2(x)$ , четную.



$$f_2(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k}{2} x, \quad (13)$$

$$a_0 = \int_0^2 f_2(x) dx = \int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2}, \quad a_k = \int_1^2 (x-1) \cos \frac{\pi k}{2} x dx = \\ = \frac{4}{\pi^2 k^2} \left( \cos \pi k - \cos \frac{\pi k}{2} \right).$$

3-й способ. Доопределим функцию  $f(x)$  на отрезке  $[0; 1]$  нулем, продолжим ее нечетным образом на отрезок  $[-2; 0]$ , а затем периодически с периодом  $2l_3 = 4$ . Получим

$$\text{нечетную функцию } f_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k}{2} x, \quad (14)$$

$$b_k = \int_1^2 (x-1) \sin \frac{\pi k}{2} x dx = -\frac{2}{\pi k} \left( \cos \pi k + \frac{4}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2} \right).$$

Заметим, что на отрезке  $[1; 2]$  ряды (12, 13, 14) сходятся в среднем квадратичном к функции  $f(x) = x - 1$ .

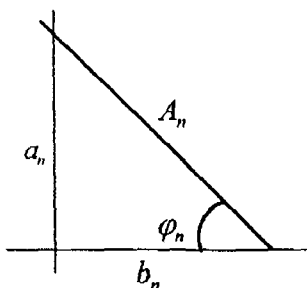


Рис. 14

Преобразуем  $n$ -ое слагаемое ряда (5) (см. рис. 14)

$$a_n \cos k_n t + b_n \sin k_n t = A_n (\sin \varphi_n \cos k_n t + \cos \varphi_n \sin k_n t) = \\ = A_n \sin(k_n t + \varphi_n). \quad (15)$$

Выражение (15) называется  $n$ -ой гармоникой,

$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  — амплитудой,  $k_n = \frac{\pi n}{l}$  — частотой,  $\varphi_n$  — начальной фазой.

С учетом (15) ряд (5) можно записать так:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n t + \varphi_n). \quad (16)$$

Совокупность амплитуд  $A_n$  и частот  $k_n$  называют *дискретным спектром* функции  $f(t)$ .

Учитывая, что

$$\sin k_n t = \frac{1}{2i}(e^{ik_n t} - e^{-ik_n t}), \quad \cos k_n t = \frac{1}{2}(e^{ik_n t} + e^{-ik_n t}),$$

$n$ -ю гармонику можно записать в виде:

$$\begin{aligned} a_n \cos k_n t + b_n \sin k_n t &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{ik_n t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-ik_n t} = \\ &= c_n e^{ik_n t} + c_{-n} e^{-ik_n t}. \end{aligned} \quad (17)$$

Полагая  $c_0 = \frac{1}{2}a_0$  и учитывая (17), ряд Фурье (5) можно

записать в комплексном виде  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n t}$ ,

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-ik_n t} dt, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

#### **§4. Характер и скорость сходимости ряда Фурье**

Как отмечалось выше, тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-непрерывной функции сходится в среднем квадратичном. Однако, ряд Фурье может сходиться и равномерно, все зависит от свойств разлагаемой функции.

Если числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$  коэффициентов ряда Фурье (16)

§3 сходится, то сам ряд Фурье (16) сходится равномерно на всей числовой оси, т.к. ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$  является для него *мажорантным*.

Заметим, что ряд Фурье можно почленно интегрировать.

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  кусочно-непрерывная на отрезке  $[-l, l]$  и в каждой точке  $x \in [-l, l]$  имеет конечные односторонние производные  $f'_-(x), f'_+(x)$ , то ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке этого отрезка, а его сумма  $S(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$  (без доказательства).

Например, функции  $f_1(x)$  и  $f_3(x)$  примера §3 отвечают условиям теоремы 1, поэтому ряды Фурье для этих функций сходятся в каждой точке отрезка  $[1; 2]$ , а в точке  $x = 2$   $f_1(2) = 0,5$ ,  $f_3(2) = 0$ , т.е. равны  $\frac{1}{2}$  полусумме своих пределов слева и справа, согласно теореме 1.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f(x)$  и все ее производные до порядка  $m \geq 0$  непрерывны на отрезке  $[-l, l]$  и удовлетворяют условию  $f(-l) = f(l)$ ,  $f'(-l) = f'(l), \dots, f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l)$ .

Если кроме того функция  $f(x)$  имеет на отрезке  $[-l, l]$  кусочно-непрерывную производную порядка  $(m+1)$ , то ряд Фурье этой функции сходится равномерно и его можно  $m$  раз почленно дифференцировать. Полученный ряд будет сходиться равномерно на  $[-l, l]$  (без доказательства).

**Следствие.** В условиях теоремы 2 остаток ряда Фурье имеет следующий порядок:  $|r(x)| = O\left(\frac{1}{n^{m+0,5}}\right)$ . (1)

Например, функция  $f_3(x)$  примера §3 удовлетворяет условиям теоремы 2 при  $m = 0$ . Ряд Фурье для этой функции сходится равномерно, но почленно дифференцировать его нельзя.

При практическом использовании рядов Фурье важен не только характер сходимости (средняя, поточечная, равномерная), но и скорость сходимости к нулю коэффициентов Фурье. Из оценок остатка (1) видно, что скорость сходимости зависит от свойств разлагаемой в ряд Фурье функции, а именно, чем глаже функция, т.е. чем больше она имеет производных, тем быстрее сходится ее ряд Фурье.

Например, ряд Фурье функции  $f_2(x)$  в §3 сходится быстрее, чем ряды Фурье функций  $f_1(x)$  и  $f_3(x)$ , т.к. она непрерывная на всей оси, а функции  $f_1(x)$  и  $f_3(x)$  — разрывные.

## §5. Преобразование и интеграл Фурье

Если функция  $f(x)$  задана на всей числовой оси и не является периодической, то ее нельзя разложить в ряд Фурье, но можно представить интегралом Фурье.

Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т.е.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ , то говорят, что функция  $f(x)$  принадлежит к классу  $L_1(-\infty, +\infty)$ .

**Теорема 1.** Если  $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ , то при любом  $k \in (-\infty, +\infty)$  несобственный интеграл

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \quad (1)$$

сходится, при этом функция  $\hat{f}(k)$  непрерывна при любом  $k$  и  $|\hat{f}(k)| \rightarrow 0$  при  $|k| \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Т.к.  $|f(x)e^{-ikx}| = |f(x)| \quad \forall k \in (-\infty, \infty)$ , а интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  сходится, то согласно признаку

Вейерштрасса (см. §1, гл.2), интеграл (1) сходится равномерно, а согласно теореме 2 §1, гл.2 функция  $\hat{f}(k)$  непрерывна. Вторую часть теоремы примем без доказательства.

**Теорема 2.** Если  $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$  кусочно-непрерывная и имеет в каждой точке односторонние производные  $f'_-(x)$ ,  $f'_+(x)$ , то в точках непрерывности функции  $f(x)$  имеет

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk, \quad (2)$$

а в точках разрыва правая часть (2) равна полусумме пределов  $f(x)$  слева и справа (без доказательства).

**Замечание.** Интеграл (2) сходится в смысле главного значения по Коши.

Равенства (1) и (2) называют соответственно *прямым и обратным преобразованиями Фурье*. Пишут  $\hat{f}(k) = Ff(x)$ ,  $f(x) = F^{-1}\hat{f}(k)$ ,  $F$  – оператор Фурье.

Преобразование Фурье аналогично преобразованию Лапласа и обладает аналогичными свойствами. В частности, согласно теореме 2 §1, гл.2.

$\hat{f}'(k) = \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-ikx} dx$ , т.е. если  $Ff(x) = \hat{f}(k)$ , то

$F(-ixf(x)) = \hat{f}'(k)$ . Это свойство аналогично свойству дифференцирования изображения по Лапласу. Можно доказать, что если  $Ff(x) = \hat{f}(k)$ , то  $Ff^{(n)}(x) = (ik)^n \hat{f}(k)$ , если  $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x) \in L_1(-\infty, \infty)$  и  $f^{(n-1)}(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Если  $f(x)$  – функция четная, то

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos kx - i \sin kx) dx = \\ &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) видно, что  $\hat{f}(k)$  – функция четная. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)(\cos kx + i \sin kx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \cos kx dx. \end{aligned} \quad (4)$$

Итак, если  $f(x)$  – четная, то получаем косинус преобразования Фурье (3,4).

Аналогично, если  $f(x)$  – функция нечетная, получим синус-преобразование Фурье

$$\hat{f}(k) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx, \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \sin kx dk. \quad (6)$$

Подставим (1) в (2), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ik(x-t)} dt. \quad (7)$$

Формула (7) называется *интегралом Фурье* функции  $f(x)$ .

Ее можно записать в действительной форме

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos k(x-t) dt. \quad (8)$$

Сравним прямое и обратное преобразования Фурье (1,2) с рядом Фурье в комплексной форме:

$$c_n = \int_{-l}^l f(x) e^{-ik_n x} dx, \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \frac{\pi}{l}. \quad (10)$$

(Ради удобства множитель  $\frac{1}{2l}$  поставлен в формулу ряда

Фурье, а не в формулу коэффициентов ряда Фурье). Частоты

$k_n = \frac{\pi}{l} n$  периодической функции  $f(x)$  образуют

арифметическую прогрессию  $-\frac{2\pi}{l}, -\frac{\pi}{l}, 0, \frac{\pi}{l}, \frac{2\pi}{l}, \dots$  с

разностью  $\Delta k_n = \Delta k = \frac{\pi}{l}$ . При неограниченном увеличении

$l$ , т.е. при  $l \rightarrow \infty$ ,  $\Delta k \rightarrow 0$ , дискретный спектр становится

непрерывным, а функция  $f(x)$  не периодической. При

$l \rightarrow \infty$  из (9) получим (1), а из (10) получим (2), т.е. вместо суммирования по дискретным частотам перейдем к интегрированию по параметру  $k$ . Поэтому функцию  $\hat{f}(k)$  называют *спектральной функцией (характеристикой)*, а

$|\hat{f}(k)|$  – спектром функции  $f(x)$ . Этот спектр, согласно теореме 1, непрерывный.

**Пример.** Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0,5, & \text{если } x = \pm 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

**Решение.** Найдем спектральную функцию

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = \int_{-1}^1 e^{ikx} dx = \frac{2 \sin k}{k}. \quad (11)$$

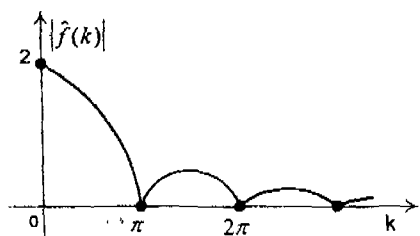


Рис 15

$|\hat{f}(k)| = 2 \left| \frac{\sin k}{k} \right|$  – спектр  
данной функции  
(см. рис. 15).

Подставляя (11) в (2), получим интеграл Фурье

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k}{k} e^{ikx} dk = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} \cos kx dk. \end{aligned} \quad (12)$$



## Глава 4. Методы математической физики

### §1. Гамма-функция

Неэлементарная гамма-функция определяется следующим несобственным интегралом, зависящим от

$$\text{параметра } \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (1)$$

Убедимся, что интеграл (1) сходится для всех  $\alpha > 0$  и действительно определяет функцию. Разобьем несобственный интеграл (1) на два несобственных

$$\text{интеграла } \Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (2)$$

При  $0 \leq x \leq 1$  подынтегральная функция первого интеграла удовлетворяет следующему неравенству  $|x^{\alpha-1} e^{-x}| \leq x^{\alpha-1}$ .

Т.к. интеграл  $\int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} \Big|_0^1$  сходится при  $\alpha > 0$  (и

расходится при  $\alpha \leq 0$ ), то по признаку сравнения первый несобственный интеграл в (2) сходится при  $\alpha > 0$ . При  $1 \leq x < \infty$  подынтегральную функцию второго

несобственного интеграла (2) сравним с функцией  $e^{-\frac{x}{2}}$ ,

интеграл от которой  $\int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx$  сходится.

Используя правило Лопиталья, найдем предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^{-x/2}} =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^{-x/2}} = 0$  при любом  $\alpha$ . А это означает, что

$|x^{\alpha-1}e^{-x}| < e^{-\frac{x}{2}} \quad \forall x > x_0$ . По признаку сравнения второй несобственный интеграл в (2) сходится.

Итак, мы доказали, что интеграл (1) сходится и определяет гамма-функцию для всех  $\alpha$  больших нуля. Можно доказать, что  $\Gamma(\alpha)$  непрерывная и дифференцируемая сколько угодно раз при  $\alpha > 0$ . При  $\alpha \leq 0$  интеграл (1) расходится. Интегрируя (1) по частям, получим

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = -x^{\alpha} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \Gamma(\alpha). \quad (3)$$

Если  $\alpha = n \in N$ , то используя формулу (3)  $n$  раз, получим  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n(n-1)(n-2)\dots\Gamma(1)$ .

Из (1) видно, что  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ , поэтому

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Перепишем (3) в виде

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}. \quad (4)$$

Из (4) видно, что  $\Gamma(\alpha) \rightarrow \infty$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

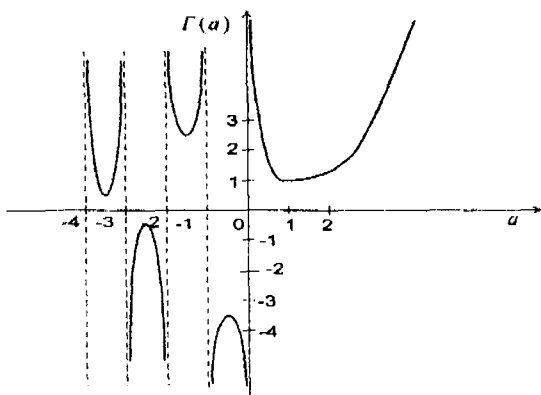


Рис. 16

Формулу (4) используют, чтобы продолжить гамма-функцию на отрицательные значения  $\alpha$ . Действительно, если  $-1 < \alpha < 0$ , то  $0 < \alpha + 1 < 1$  и правая часть (4) определена. Очевидно,  $\Gamma(\alpha) \rightarrow -\infty$  при  $\alpha \rightarrow -0$ ,  $\Gamma(\alpha) \rightarrow -\infty$  при  $\alpha \rightarrow -1 + 0$ . Зная значения при  $-1 < \alpha < 0$ , можно по формуле (4) вычислить значения функции  $\Gamma(\alpha)$  при  $-2 < \alpha < -1$  и т.д. (график гамма-функции см. на рис. 16).

## §2. Дельта-функция

В линейном  $n$ -мерном пространстве тождественный (единичный) оператор  $\tilde{E}$  ( $\tilde{E}x = x$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) определяется единичной матрицей  $E$ , которую можно записать с помощью символа Кронекера

$$e_{ik} = \delta_{ik} = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^n \delta_{ik} = 1. \quad (1)$$

При этом 
$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_k = x_i. \quad (2)$$

В функциональном пространстве по аналогии вводят интегральный единичный оператор, который можно записать с помощью так называемой дельта-функции

$$\delta(x-t) = \delta(t-x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x = t, \\ 0, & \text{если } x \neq t, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t) dt = 1. \quad (3)$$

$$\text{При этом } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-t) f(t) dt = f(x), \quad (4)$$

если  $f(x)$  непрерывная в точке  $t = x$ .

Дельта-функция может быть многими способами представлена в виде некоторого предела. Например,

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2} \right) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} = \frac{1}{\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{dy}{y} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-2\pi a}^{2\pi a} e^{iay} dy. \quad (5)$$

Приведем некоторые свойства  $\delta$ -функции.

$$1. \delta(\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \delta(x).$$

$$2. x\delta(x) = 0.$$

$$3. f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x), \quad f(x \pm a)\delta(x) = f(a)\delta(x).$$

$$4. \delta'(x) = -\frac{1}{x} \delta(x), \quad \frac{d^n}{dx^n} \delta(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^n} \delta(x).$$

$$5. \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(x-t) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad \text{если } f^{(n)}(x)$$

непрерывна.

$$6. \int_{-\infty}^x \delta(t) dt = \eta(x) - \text{единичная функция Хевисайда.}$$

$$7. \eta'(x) = \delta(x).$$

С введением  $\delta$ -функции функции с разрывами первого рода становятся формально дифференцируемыми.

**Пример 1.** Найти производную функции

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3, & x \leq 1, \\ x^2 - 1, & x > 1. \end{cases}$$

**Решение.** Функция  $f(x)$  в точке  $x = 1$  имеет скачок  $h = -3$ , в остальных точках  $f(x)$  дифференцируемая.

Поэтому

$$f'(x) = \varphi(x) - 3\delta(x - 1), \text{ где } \varphi(x) = \begin{cases} 9x^2, & x \leq 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$$

**Пример 2.** Тонкий материальный стержень, расположенный по оси  $x$  ( $0 \leq x \leq l$ ), имеет линейную плотность  $\gamma_1(x)$ . В точках  $x_1$  и  $x_2$  на него надеты тонкие диски, массы которых  $m_1$  и  $m_2$ . Записать выражение для общей линейной плотности стержня с дисками.

**Решение.** Используя  $\delta$ -функцию, запишем

$$\gamma(x) = \gamma_1(x) + m_1\delta(x - x_1) + m_2\delta(x - x_2).$$

Общая масса, очевидно, запишется так:

$$m = \int_0^l (\gamma_1(x) + m_1\delta(x - x_1) + m_2\delta(x - x_2)) dx =$$

$$\int_0^l \gamma_1(x) dx + m_1 + m_2.$$

### §3\*. Уравнения математической физики

Под уравнениями математической физики обычно понимают линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Общий вид такого уравнения следующий:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f. \quad (1)$$

Здесь  $a_{ij}, b_i, f$  – заданные функции переменной  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $u(x)$  – неизвестная функция. Уравнения вида (1) классифицируются следующим образом. Фиксируется точка  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ . Из коэффициентов  $a_{ij}$  уравнения (1) составляется квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 \cdot h_i \cdot h_j, \text{ где } a_{ij}^0 = a_{ij}(x^0).$$

Составляется и решается характеристическое уравнение квадратичной формы  $\det(A - E) = 0$ , где  $A$  – матрица квадратичной формы,  $E$  – единичная матрица. Если все корни характеристического уравнения одинакового знака, то уравнение (1) называют *эллиптическим*; если знак одного корня противоположен знаку остальных корней, то – *гиперболическим*; если же один корень равен нулю, а все остальные одного знака, то уравнение (1) называют *параболическим*.

Уравнения эллиптического типа описывают стационарные процессы, например, электростатическое поле заряда, потенциальное поле скоростей несжимаемой жидкости и др. Простейшими уравнениями эллиптического типа являются уравнения Лапласа и Пуассона  $\Delta u = 0$ ,  $\Delta u = f$ .

Гиперболические уравнения описывают колебательные процессы, распространение звука, распространение электромагнитных волн. Примером гиперболического уравнения является волновое уравнение  $\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .

Уравнения параболического типа описывают такие процессы, как теплопроводность, диффузия, движение вязкой жидкости. Простейшим примером уравнения

параболического типа является уравнение теплопроводности  $\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}$ .

Здесь  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа,

$x, y, z$  — пространственные координаты,  $t$  — время.

Дадим вывод телеграфного уравнения. Если протяженность электрической цепи не велика, то ее можно представить в виде колебательного контура с сосредоточенными параметрами  $R, L, C, G$  (сопротивление, самоиндукция, емкость и коэффициент утечки). Математической моделью такой цепи является ОДУ второго порядка (см. §2, гл.2).

При этом имеют место следующие соотношения  $u_c = L \frac{di}{dt}$ ,

$$i_{cm} = c \frac{du}{dt}, \quad i_y = Gu, \quad (2)$$

где  $u_c$  — э.д.с. самоиндукции,  $i_{cm}$  — ток смещения,  $i_y$  — ток утечки,  $u$  — напряжение.

Для длинных цепей (телеграфные линии, линии передачи энергии и пр.) параметры нельзя считать сосредоточенными, они распределенные по длине электрической цепи. Пусть параметры  $R, L, C$  и  $G$  постоянные и рассчитаны на единицу длины провода. Расположим электрический провод по оси  $x$  и пусть  $u(x, t), i(x, t)$  — напряжение и ток в момент времени  $t$  в

точке  $x$ . Падение напряжения на отрезке  $\Delta x$   $\Delta u = -\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$

вызывается падением напряжения из-за омического сопротивления  $\Delta u_R = iR\Delta x$  и из-за возникновения э.д.с.

самоиндукции  $\Delta u_c = L \frac{\partial i}{\partial t} \Delta x$ .

Тогда  $\Delta u = \Delta u_R + \Delta u_c$  или  $\frac{\partial u}{\partial x} + iR + L \frac{\partial i}{\partial t} = 0$ . (3)

Изменение тока на отрезке  $\Delta x$   $\Delta i = -\frac{\partial i}{\partial x} \Delta x$  обусловлено

током утечки  $\Delta i_y = Gu \Delta x$  и током смещения

$\Delta i_{cu} = c \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x$ . Поэтому  $\Delta i = \Delta i_y + \Delta i_{cu}$  или

$$\frac{\partial i}{\partial x} + Gu + c \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Исключая из (3,4) ток, получим телеграфное уравнение для напряжения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial u}{\partial t} + RGU. \quad (5)$$

Если из (3,4) исключить напряжение, то получим аналогичное уравнение для тока. Если сопротивление провода очень мало и он хорошо изолирован, то полагая в (5)  $R = G = 0$ , получим волновое уравнение (уравнение

колебания струны)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . (6)

Если  $L = G = 0$ , то из (5) получим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = RC \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (7)$$

Таким образом, телеграфное уравнение (5) при различных значениях параметров может принадлежать к любому из перечисленных трех типов уравнений.



## §4\*. Задачи математической физики. Метод Даламбера

Для уравнений мат. физики решаются как задача Коши, так и граничные задачи. Различают три вида граничных задач: первого, второго и третьего рода. Пусть решение уравнения (1) §3\* ищется внутри или вне некоторой области  $D$  с границей  $\partial D$ . Если на границе задано условие  $u(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial D$ , (1)

то это граничная задача первого рода, или задача Дирихле. Если на границе задано условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \psi(x) \quad \forall x \in \partial D, \quad (2)$$

где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная функции по направлению нормали к границе области  $D$ , то это вторая граничная задача, или задача Неймана. В третьей или смешанной задаче граничные условия записываются в виде:

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g(x) \quad \forall x \in \partial D. \quad (3)$$

Для уравнений Лапласа и Пуассона возможны только граничные задачи. Для уравнений теплопроводности и волнового уравнения решается и задача Коши.

Из основных методов решения уравнений мат. физики отметим следующие: метод характеристик, метод интегральных преобразований и метод Фурье (разделение переменных).

Не рассматривая сам метод характеристик, воспользуемся его результатом — решением уравнения колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_1(x - at) + u_2(x + at)). \quad (5)$$

Непосредственной подстановкой (5) в (4) убедимся, что (5) является решением уравнения (4), если произвольные функции  $u_1$  и  $u_2$  дважды дифференцируемы. Решение  $u_1(x - at)$  называют *прямой бегущей волной*, а решение  $u_2(x + at)$  — *обратной бегущей волной*. Таким образом, общее решение (5) представляет собой суперпозицию (наложение) прямой и обратной волн.

Струну будем считать бесконечной и решим задачу Коши с начальными условиями  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u'(x, 0) = g(x)$ . (6)

Требую выполнения начальных условий (6), из (5) получим

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} (u_1(x) + u_2(x)) = f(x), \quad (7)$$

$$u'(x, 0) = \frac{a}{2} (u_2'(x) - u_1'(x)) = g(x).$$

Интегрируя последнее уравнение из (7), получим

$$\frac{1}{2} (u_2(x) - u_1(x)) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x g(y) dy + c. \quad (8)$$

Из (7) и (8) найдем неизвестные функции  $u_1$  и  $u_2$ .

$$u_1(x) = f(x) - \frac{1}{a} \int_{x_0}^x g(y) dy - c, \quad (9)$$

$$u_2(x) = f(x) + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x g(y) dy + c.$$

Подставляя (9) в (5), получим решение задачи Коши

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x - at) + f(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(y) dy. \quad (10)$$

Формула (10) называется решением Даламбера задачи Коши для уравнения колебания струны.

## §5\*. Метод интегральных преобразований

Метод интегральных преобразований является одним из наиболее распространенных методов решения дифференциальных уравнений как обычных, так в частных производных. Ранее (см. §4, гл.2) мы рассмотрели метод преобразования Лапласа решения ОДУ и уравнений в частных производных. Однако, кроме преобразования Лапласа и Фурье (см. §5, гл.3) существуют и другие интегральные преобразования, например, Ханкеля, Меллина, Вебера и др.

Мы воспользуемся синус-преобразованием Фурье

$$\hat{f}(k) = \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \sin kx dk \quad (1)$$

для решения следующей задачи.

**Задача.** Полубесконечное тело, ограниченное плоскостью  $x = 0$ , имеет заданное начальное распределение температуры  $T(x,0) = g(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ . Найти последующее распределение температуры в теле, считая, что с момента времени  $t = 0$  его граница поддерживается при нулевой температуре.

**Решение.** Математическая модель этой задачи следующая: найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{с начальным условием } u(x,0) = g(x) \quad (3)$$

$$\text{и граничным условием } u(0,t) = 0. \quad (4)$$

Будем считать, что  $g(x) \in L_1(0, \infty)$  и имеет односторонние производные. Неизвестная функция  $u(x,t) \in L_1(0, \infty)$  вместе со своими производными до второго порядка. Тогда,

используя преобразование (1), вместо (2-4) получим

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -a^2 k^2 \hat{u}, \quad (2')$$

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{g}(k). \quad (3')$$

Решение ОДУ с постоянными коэффициентами с начальным условием (3') имеет вид

$$\hat{u}(k, t) = \hat{g}(k) e^{-a^2 k^2 t}. \quad (5)$$

Используя обратное синус-преобразование Фурье (1), найдем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{g}(k) e^{-a^2 k^2 t} \sin kx dk. \quad (6)$$

Легко проверить, что (6) удовлетворяет граничному условию (4) и является решением данной задачи. В

частности, если  $g(x) = xe^{-x}$ , то  $\hat{g}(k) = \frac{k}{(1+k^2)^2}$  и

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{k}{(1+k^2)^2} e^{-a^2 k^2 t} \sin kx dk. \quad (7)$$

## §6\*. Метод разделения переменных

Метод разделения переменных (метод Фурье) - самый распространенный метод решения краевых задач в ограниченной области. Суть метода состоит в представлении решения в виде ряда Фурье по некоторой ортогональной системе функций. Продемонстрируем этот метод на следующей задаче.

**Задача.** Найти поперечные колебания круглой мембраны радиуса  $r_0$  с закрепленным краем, вызванные сосредоточенным ударом, передавшим мембране в ее центре импульс  $k$ .

**Решение.** Задача сводится к решению волнового уравнения

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

с граничным условием

$$u(r_0, t) = 0 \quad (2)$$

и начальными условиями

$$u(r, 0) = 0, \quad u'(r, 0) = \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\delta(r)}{r}, \quad (3)$$

где  $\gamma$  – плотность мембраны,  $\delta(r)$  – дельта-функция.

Запишем оператор Лапласа в цилиндрической системе координат (§9 гл.9, ч.1), учитывая, что отклонение  $u$  не зависит от  $z$  и угла  $\Theta$ .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1')$$

Решение будем искать в классе функций, представимых в виде произведения

$$u(r, t) = R(r)T(t). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1'), получим  $R''T + \frac{1}{r}R'T = \frac{1}{a^2}RT'' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -\lambda^2. \quad (5)$$

Т.к. правая часть (5) зависит только от  $t$ , а левая только от  $r$ , то эти части являются постоянной величиной. Обозначим ее  $(-\lambda^2)$ . Тогда получим два обыкновенных дифференциальных уравнения (разделим переменные)

$$R'' + \frac{1}{r}R' = -\lambda^2 R, \quad (6)$$

$$T'' + a^2 \lambda^2 T = 0. \quad (7)$$

Обозначив оператор  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = L$ , перепишем (6) так:

$$LR = -\lambda^2 R. \quad (6')$$

Из (6') видно, что  $(-\lambda^2)$  является собственным числом оператора  $L$ , а  $R$  - собственной функцией, отвечающей собственному числу  $(-\lambda^2)$  (см. §5 гл.7, ч.1).

Собственные функции  $R(r)$ , очевидно, удовлетворяют граничному условию  $R(r_0) = 0$ , (2')

а собственные функции  $T(t)$  - начальному условию  $T(0) = 0$ . (3')

Уравнение (6) есть уравнение Бесселя (см. §17 гл.8, ч.1), его решением является  $R = I_0(\lambda r)$ . Требуя выполнения граничного условия (2'), найдем собственные числа.

$$I_0(\lambda r_0) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{\mu_n}{r_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \mu_n - \text{корни функции}$$

Бесселя  $I_0(\lambda)$ .

Подставляя найденные собственные числа  $\lambda_n$  в (7), найдем решение этого уравнения с учетом начального условия (3').

Решение (7) запишем в виде

$$T_n(t) = b_n \sin(a\lambda_n t). \quad (8)$$

Предполагая, что искомая функция  $u(r, t) \in L'_2(0, r_0)$ , разложим ее в ряд Фурье по ортогональной с весом  $\rho(r) = r$  системе функций Бесселя

$$I_0\left(\frac{\mu_1}{r_0} r\right), I_0\left(\frac{\mu_2}{r_0} r\right), \dots, I_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right), \dots \quad (9)$$

С учетом представлений (4) и (8) ряд Фурье запишем в виде

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{a\mu_n}{r_0} t\right) I_0\left(\frac{\mu_n}{r_0} r\right). \quad (10)$$

Потребуем теперь выполнения второго начального условия (3). Дифференцируя (10) по  $t$  при  $t = 0$ , получим следующий ряд Фурье

$$\frac{k}{\gamma} \frac{\delta(r)}{r} = \frac{a}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n b_n I_0 \left( \frac{\mu_n}{r_0} r \right). \quad (11)$$

Коэффициенты  $\left( \frac{a}{r_0} \mu_n b_n \right)$  ряда Фурье (11) находятся, как известно (см. (12) §2 гл.3), по формуле

$$\frac{a}{r_0} \mu_n b_n = \frac{1}{\left\| I_0 \left( \frac{\mu_n}{r_0} r \right) \right\|^2} \left( \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\delta(r)}{r}, I_0 \left( \frac{\mu_n}{r_0} r \right) \right). \quad (12)$$

Учитывая, что  $\left\| I_0 \left( \frac{\mu_n}{r_0} r \right) \right\|^2 = \frac{1}{2} r_0^2 I_1^2(\mu_n)$  (см. (8) §1 гл.3),

$$\left( \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\delta(r)}{r}, I_0 \left( \frac{\mu_n}{r_0} r \right) \right) = \frac{k}{\gamma} \int_0^r \delta(r) I_0 \left( \frac{\mu_n}{r_0} r \right) dr = \frac{k}{\gamma}, \quad \text{найдем}$$

$$b_n = \frac{2k}{a r_0 \gamma \mu_n I_1^2(\mu_n)}.$$

Подставляя эти коэффициенты в (10), получим решение задачи

$$u(r, t) = \frac{2k}{a r_0 \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n I_1^2(\mu_n)} \cdot \sin \left( \frac{a \mu_n}{r_0} t \right) I_0 \left( \frac{\mu_n}{r_0} r \right).$$

## **Глава 5. Теория вероятностей и математическая статистика**

### **§1. Некоторые сведения из комбинаторики**

Рассмотрим конечное множество некоторых элементов  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Всякое подмножество этого множества называют соединением. Например,  $a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3$  — соединения.

**Определение 1.** Размещением из  $n$  элементов по  $k$  (пишут  $A_n^k$ ) называют такие упорядоченные соединения, каждое из которых содержит  $k$  элементов из данных  $n$  элементов множества. Два размещения считаются различными, если они различаются хотя бы одним элементом или порядком следования элементов.

Число размещений определяется формулой:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1). \quad (1)$$

Формулу (1) можно доказать методом математической индукции.

**Пример 1.** Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если цифры в числе не повторяются?

**Решение.** Непосредственным перебором найдем, что этих чисел двенадцать: 12, 13, 14, 23, 24, 34, 21, 31, 41, 32, 42, 43.

По формуле (1) получим:  $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ , что совпадает с непосредственными подсчётами.

Если элемент в размещении может повторяться, то такие размещения называются размещениями с повторениями.

Их число определяется формулой

$$\tilde{A}_n^k = n^k. \quad (2)$$

Если в примере 1 не требовать, чтобы цифры были разными, то к полученным 12 числам следует добавить ещё четыре: 11, 22, 33, 44. Всего их будет 16. Согласно формуле (2),

$$\tilde{A}_4^2 = 4^2 = 16,$$

что совпадает с результатом, полученным непосредственным подсчётом.

**Определение 2.** Размещения из  $n$  элементов по  $n$  называются *перестановками*. Перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов.



Число перестановок определяется формулой:

$$P_n = A_n^n = n!. \quad (3)$$

Формула (3) получается из (1) при  $k=n$ .

**Определение 3.** Размещения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, называются *сочетаниями*. Число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  определяется формулой:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \quad (4)$$

**Пример 2.** В группе 15 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из 5 человек?

**Решение.**  $C_{15}^5 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003$ .

Рассматриваются также перестановки и сочетания с повторениями. Число сочетаний с повторениями определяется формулой

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k, \quad (5)$$

а число перестановок с повторениями определяется формулой

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}, \quad (6)$$

где из  $n$  элементов  $n_1$  элементов первого типа,  $n_2$  элементов второго типа,  $n_k$  элементов  $k$ -го типа ( $n_1+n_2+\dots+n_k=n$ ).

## ***§2. Предмет теории вероятностей. Три подхода к определению вероятности***

Возникновение теории вероятностей относят к 17-му веку и связывают с комбинаторными задачами азартных игр. По-видимому, это единственный положительный пример, как-то связанный с пороками общества.

Как видно уже из названия этого раздела математики, объектом изучения теории вероятностей является случайность, неопределённость, как правило, связанная с недостатком информации. Например, при бросании игральной кости (кубика) трудно учесть все факторы, влияющие на выпадение определённого числа очков, поэтому предсказать точно, что выпадет определённое число очков, невозможно.

Всякий исход опыта (эксперимента, наблюдения) называют *событием*. Если в результате опыта некоторое событие обязательно происходит, то его называют *достоверным*. Если событие не может произойти, то его называют *невозможным*. Если событие может произойти, а может и не произойти, то его называют *случайным*. Например, при бросании игральной кости выпадение шести очков – событие случайное, выпадение семи очков – событие невозможное, а выпадение не более шести очков – событие достоверное.

Различные случайные события обладают различной возможностью своего осуществления. Если, например, в лотерее разыгрывается один автомобиль и 100 велосипедов, то интуитивно ясно, что выигрыш велосипеда – событие более возможное, чем выигрыш автомобиля. Мера осуществимости случайного события и есть его вероятность.

Теория вероятности изучает не сами случайные явления, а закономерности в этих случайных явлениях. Давно замечено, например, что при многократном подбрасывании монеты наблюдается устойчивость частоты появления герба. Если  $n_*$  - число всех подбрасываний,  $m_*$  - число появлений герба, то частота появлений герба

$$p_* = \frac{m_*}{n_*} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad n_* \rightarrow \infty.$$

Чтобы проверить эту закономерность, Бюффон провел 4040 подбрасываний монеты. Герб выпал 2048 раз, частота  $p^* = 0,507$ . Пирсон провёл 24000 подбрасываний, герб выпал 12012 раз, частота  $p^* = 0,5005$ .

Эта закономерность имеет общий характер, т.е. частота появления некоторого события  $A$  в серии повторяемых в одинаковых условиях опытов стремится к некоторому числу  $p$  при неограниченном увеличении числа опытов. Естественно, это число  $p$  и принять за вероятность события  $A$ . Пишут  $P(A) = p$ . Такое определение вероятности события  $A$  называют статистическим, его предложил в 1919 году Мизес. Главным достоинством и одновременно недостатком статистического определения вероятности является его непосредственная связь с практикой. С одной стороны, оценить (найти приближенно) вероятность реального случайного события можно только по его частоте, а с другой стороны, неприемлемо положить в фундамент теоретической науки результат эксперимента, который, к тому же, практически не осуществим.

Результатом усилий многих ученых (Ферма, Паскаль, Гюйгенс, Бернулли, Лаплас) явилось второе определение вероятности, так называемое классическое определение вероятности. Прежде чем привести это определение, введем некоторые дополнительные понятия.

Говорят, что множество исходов данного опыта образует *полную группу событий*, если в результате опыта непременно должно произойти одно из этих событий. Например, при подбрасывании монеты множество  $\{\Gamma, \Psi\}$  (герб, цифра) – полная группа событий (падение на ребро и пр. считаем событиями невозможными). При бросании игральной кости множество  $\{\omega_i\}_{i=1}^6$  – полная группа событий,  $\omega_i$  – выпадение  $i$  очков.

Исходы опыта называют попарно *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться вместе. Например, при одном бросании кости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  -- события несовместные.

Понятие *равновозможности* исходов опыта основывается на каких-либо соображениях симметрии. Например, если игральный кубик симметричный, то нет оснований считать, что шесть очков будет выпадать чаще, чем одно. События  $\omega_i, i=1,2,\dots,6$  -- равновозможные.

Если некоторый исход опыта непременно влечет за собой осуществление события  $A$ , то этот исход называют *благоприятным событием* для события  $A$ . Пусть, например,  $A$  -- выпадение четного числа очков при бросании кубика. Тогда  $\omega_2, \omega_4, \omega_6$  -- благоприятные события для события  $A$ . Если событие  $\omega$  не имеет благоприятных для себя исходов, за исключением самого себя, то оно называется *элементарным*.

**Определение** (классическое). *Вероятностью* события  $A$  называется отношение числа  $m$  благоприятных событию  $A$  исходов опыта к числу  $n$  всех исходов, образующих полную группу равновозможных и попарно несовместных событий, т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

Заметим, что классическое определение вероятности имеет смысл, если число исходов опыта конечное. Невозможному событию припишем нулевую вероятность, а вероятность достоверного события будем считать единицей, так что

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

**Пример 1.** В сборочный цех поступило 3000 деталей с первого автомата и 2000 со второго. Первый автомат дает 0,4% брака, второй -- 0,2%. Какова вероятность, что на сборку поступит бракованная деталь?

**Решение.** Число всех исходов  $n=3000+2000=5000$ . Пусть  $A$  означает, что на сборку поступила бракованная деталь  
Число благоприятных случаев

$$m=3 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 16.$$

Согласно формуле (1) получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = 32 \cdot 10^{-4}.$$

**Пример 2.** Какова вероятность открыть буквенный замок, если он состоит из пяти дисков, каждый из которых разделен на 6 секторов с различными буквами?

**Решение.** Пусть событие  $A$  означает, что замок открыт. Число благоприятных случаев  $m=1$ , а число всех исходов опыта  $n=\tilde{A}_6^5 = 6^5$ . Согласно формуле (1) получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6^5} \approx 0.00013.$$

Достоинством классического определения вероятности является то, что оно в основном правильно отражает наше интуитивное представление о вероятности реального случайного события. В то же время оно не может быть положено в основу математической дисциплины т.к. основано на понятии равновозможности (симметрии), проверить которую в рамках самой теории, не обращаясь к эксперименту, невозможно.

Безупречным с точки зрения математики является аксиоматическое определение вероятности. Задачу аксиоматического обоснования теории вероятностей поставил Гильберт, инициатором ее решения был Борель, а наиболее удачное аксиоматическое обоснование предложил Колмогоров. Чтобы рассмотреть подробнее аксиоматическое определение вероятности, следует ввести некоторые дополнительные понятия.

### **§3. Пространство элементарных событий. Операции над событиями**

*Пространство элементарных событий* – это некоторое множество  $\Omega$ , элементы которого  $\omega$  называются элементарными событиями. При классическом определении вероятности  $\Omega$  – множество всех равновозможных и попарно несовместных исходов опыта. В общем случае пространство элементарных событий не определяется, оно является понятием основным. Его можно только разъяснить на примерах.

**Пример 1.** Бросание игральной кости. При реальном бросании кости она может куда-нибудь закатиться, расколоться, стать на ребро или на вершину, если грунт мягкий, и т.д. В математической модели этого опыта мы отвлекаемся от многих несущественных моментов и считаем, что исходов опыта всего шесть:  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$ . Множество этих взаимоисключающих исходов  $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^6$  – есть пространство элементарных событий.

**Пример 2.** Бросание двух игральных костей. Под элементарными событиями будем понимать размещения с повторениями из шести элементов по два:  $\omega_1\omega_1, \omega_1\omega_2, \omega_1\omega_3, \dots$ . Их число  $n = \tilde{A}_6^2 = 36$ . Множество  $\Omega = \{\omega_i\omega_k\}_{i,k=1}^6$  – пространство элементарных событий.

**Пример 3.** Отказ прибора – событие случайное. Прибор может отказать в момент включения, а может проработать неопределенно долго. Поэтому под пространством элементарных событий будем понимать луч  $\Omega = \{\omega \geq 0\}$ , а элементарным событием будем считать момент отказа, т.е. точку  $\omega$  на этом луче. Элементарным событием можно считать и любой отрезок, левый конец которого совпадает с началом луча,  $\omega = \{x: 0 \leq x \leq \omega\}$ . Очевидно, что число исходов этого опыта несчетное.

**Пример 4.** Стрельба по мишени. Введем в плоскости мишени декартову прямоугольную систему координат. Тогда каждому исходу опыта – попаданию в точку мишени, мы поставим в соответствие саму эту точку или упорядоченную пару чисел  $(x,y)$ . Эта точка и будет элементарным событием. Вся мишень – пространство элементарных событий. Если мишень круглая радиуса  $r$ , а начало координат в центре, то  $\Omega = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq r^2\}$ . Очевидно, что число исходов опыта множество несчетное.

Уточним теперь понятие случайного события. Под *случайным событием* будем понимать всякое подмножество множества  $\Omega$ . Само множество  $\Omega$  назовем достоверным событием, а пустое множество  $\emptyset$  – невозможным событием. Подмножество  $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$  множества  $\Omega$  пр.1. есть случайное событие, означающее выпадение четного числа очков. Подмножество  $B = \{\omega_i, \omega_i\}_{i=1}^6$  множества  $\Omega$ , пр.2. означает выпадение одинакового числа очков на обоих кубиках. Всякий интервал луча пр.3. и всякая область круга пр.4 отождествляются со случайным событием. Элементарные события, входящие в состав случайных событий, являются для них благоприятными.

Поскольку случайные события отождествляются с множеством, а над множеством можно производить операции сложения, умножения и др. (см §1 гл.2, ч.1), то и над случайными событиями, очевидно, можно производить аналогичные операции.

Если всякое элементарное событие  $\omega$  из  $A$  входит также и в  $B$ , то пишут  $A \subset B$ . Говорят,  $A$  есть подмножество множества  $B$ , событие  $A$  влечет за собой событие  $B$ , событие  $A$  – частный случай события  $B$ . Если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ , то события  $A$  и  $B$  называют равными. Пишут  $A = B$ .

*Суммой (объединением)* событий  $A$  и  $B$  называют событие  $C$ , состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих по крайней мере одному из событий  $A$  или  $B$ . Пишут  $C=A+B$  или  $C=A \cup B$ . В реальном опыте сумма  $A+B$  означает, что произошло либо событие  $A$ , либо событие  $B$ , либо оба вместе. Понятие суммы можно распространить на  $n$  событий:

$$C = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

*Произведением (пересечением)* событий  $A$  и  $B$  называют событие  $C$ , состоящее из элементарных событий, принадлежащих одновременно событию  $A$ , и событию  $B$ . Пишут  $C=AB$  или  $C=A \cap B$ . В реальном опыте произведение  $AB$  означает, что произошло и событие  $A$ , и событие  $B$ . Понятие произведения можно распространить на  $n$  событий:

$$C = A_1 A_2 \dots A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

*Разностью* двух событий  $A$  и  $B$  называют событие  $C$ , состоящее из элементарных событий, принадлежащих событию  $A$ , но не принадлежащих событию  $B$ . Пишут  $C=A-B$ , или  $C=A \setminus B$ . В реальном опыте разность  $A-B$  означает, что происходит событие  $A$ , а событие  $B$  не происходит.

Событие  $\bar{A} = \Omega - A$  называют *противоположным* событию  $A$  или дополнением к  $A$ . Если  $AB = \emptyset$ , то события  $A$  и  $B$  называют *несовместными*, в противном случае – *совместными*.

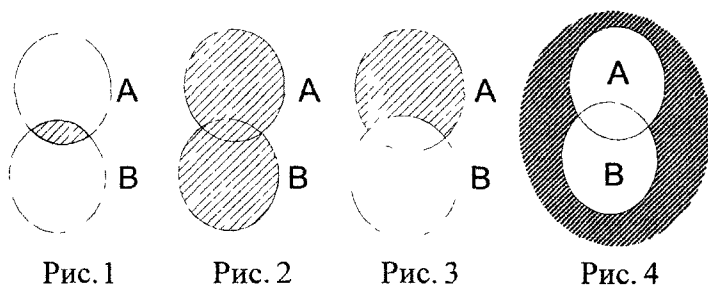
**Пример 5.** Опыт состоит из трех выстрелов по мишени. Пусть события  $A_1, A_2, A_3$  означают попадание в мишень при 1-ом, 2-ом, 3-ем выстрелах соответственно. Тогда

- 1)  $C_1 = A_1 + A_2 + A_3$  означает хотя бы одно попадание;
- 2)  $C_2 = A_1 A_2 A_3$  – попаданий ровно 3;



- 3)  $C_3 = A_1 - A_2$  – попадание при первом выстреле и не попадание при втором, что можно записать иначе  $C_3 = A_1 \bar{A}_2$ ;
- 4)  $\bar{C}_1 = \overline{A_1 + A_2 + A_3}$  – ни одного попадания, что можно записать иначе –  $\bar{C}_1 = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ ;
- 5)  $\bar{C}_2 = \overline{A_1 A_2 A_3}$  – попаданий не 3, что можно записать иначе –  $\bar{C}_2 = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$ .

Отождествим случайное событие с множеством точек плоскости внутри замкнутой кривой. Тогда введенные операции над событиями легко проиллюстрировать геометрически с помощью так называемых диаграмм Венна.



На рис. 1- 4 заштрихованные части означают:

1)  $AB$ ; 2)  $A+B=A+B\bar{A}$ ; 3)  $A-B=A\bar{B}$ ; 4)  $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$ .

Можно доказать, что введенные операции над событиями удовлетворяют следующим свойствам:

- 1)  $A+B=B+A$ ,  $AB=BA$ ;
- 2)  $(A+B)+C=A+(B+C)$ ,  $(AB)C=A(BC)$ ;
- 3)  $(A+B)C=AC+BC$ ;
- 4)  $A+A=A$ ,  $AA=A$ ;
- 5)  $A+\Omega=\Omega$ ,  $A\Omega=A$ ,  $A+\emptyset=A$ ,  $A\emptyset=\emptyset$ ;
- 6)  $A+\bar{A}=\Omega$ ,  $A\bar{A}=\emptyset$ ;

- 7)  $A+B=A$ ,  $AB=B$ , если  $B \subset A$ ;
- 8) если  $C = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , то  $\bar{C} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$ ;
- 9) если  $C = \bigcap_{i=1}^n A_i$ , то  $\bar{C} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$ .

Последние два свойства называют законами де-Моргана (отрицание суммы равно произведению отрицаний, отрицание произведения равно сумме отрицаний).

#### § 4. Аксиоматическое определение вероятности

Пусть  $\Omega$  – пространство элементарных событий, а  $\mathfrak{F}$  – некоторая система подмножеств множества  $\Omega$ , т.е. некоторое множество случайных событий.

**Определение 1.** Непустое множество  $\mathfrak{F}$  называется алгеброй событий, если выполняются следующие аксиомы:

- 1)  $\Omega \in \mathfrak{F}$ ;
- 2) если  $A \in \mathfrak{F}$  и  $B \in \mathfrak{F}$ , то  $A+B \in \mathfrak{F}$ ,  $AB \in \mathfrak{F}$  и  $A-B \in \mathfrak{F}$ .

Алгебра событий  $\mathfrak{F}$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если вторая аксиома определения 1 распространена на бесконечную последовательность событий  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ , т.е.

если  $A_n \in \mathfrak{F} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , то  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ .

Поскольку  $\Omega - \Omega = \emptyset$ , то пустое множество согласно определению 1 принадлежит  $\mathfrak{F}$ . Если  $A \in \mathfrak{F}$ , то согласно определению 1  $\bar{A} = \Omega - A$  также принадлежит  $\mathfrak{F}$ . Таким образом, алгебра событий есть класс множеств замкнутый относительно операций сложения, умножения и дополнения.

Простейшим примером алгебры событий является множество, состоящее из двух элементов  $\emptyset$  и  $\Omega$ . Легко проверить, что  $\mathfrak{T}=\{\emptyset, \Omega\}$ - алгебра событий.

Если  $\Omega$  конечное множество, то можно доказать, что множество всех его подмножеств является алгеброй событий.

**Определение 2.** Вероятностью называется числовая функция, определенная на некоторой  $\sigma$ - алгебре  $\mathfrak{T}$ . Каждому событию  $A \in \mathfrak{T}$  она ставит в соответствие число  $P(A)$ . При этом должны выполняться следующие аксиомы:

- 1)  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{T}$ ;
- 2)  $P(\Omega)=1$ ;
- 3)  $P(A+B)=P(A)+P(B)$ , если  $A \in \mathfrak{T}, B \in \mathfrak{T}, AB=\emptyset$ ;
- 4)  $P(A)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ , если  $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{T}$  и события  $A_n$

попарно несовместны.

**Замечание.** Если вероятность определена на алгебре  $\mathfrak{T}$ , то аксиома 4 опускается. Совокупность  $(\Omega, \mathfrak{T}, P)$  называют вероятностным пространством.

В примере 1 §3  $\Omega=\{\omega_i\}_{i=1}^6$ . Множество всех подмножеств  $\Omega$  будет алгеброй событий  $\mathfrak{T}$ . Любое случайное событие  $A \in \mathfrak{T}$  можно записать так  $A=\{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{ik}\}$ . Событие  $A$  содержит  $k$  ( $0 \leq k \leq 6$ ) элементарных событий. При этом при  $k=0$   $A=\emptyset$ , при  $k=1$   $A=\omega_i$ , при  $k=6$   $A=\Omega$ . Событие  $B=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ , например, означает выпадение четного числа очков. Здесь  $\omega_{i1}=\omega_2, \omega_{i2}=\omega_4, \omega_{i3}=\omega_6$ . Положим

$$P(A)=\frac{k}{n}, \quad (1)$$

где  $n=6$ . Можно убедиться (сделать это самостоятельно), что функция (1) удовлетворяет аксиомам 1-3 опр.2 и, следовательно, является вероятностью. При  $k=1$  из (1)

Простейшим примером алгебры событий является множество, состоящее из двух элементов  $\emptyset$  и  $\Omega$ . Легко проверить, что  $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\}$  - алгебра событий.

Если  $\Omega$  конечное множество, то можно доказать, что множество всех его подмножеств является алгеброй событий.

**Определение 2.** Вероятностью называется числовая функция, определенная на некоторой  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{F}$ . Каждому событию  $A \in \mathfrak{F}$  она ставит в соответствие число  $P(A)$ . При этом должны выполняться следующие аксиомы:

- 1)  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{F}$ ;
- 2)  $P(\Omega) = 1$ ;
- 3)  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ , если  $A \in \mathfrak{F}$ ,  $B \in \mathfrak{F}$ ,  $AB = \emptyset$ ;
- 4)  $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ , если  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$  и события  $A_n$

попарно несовместны.

**Замечание.** Если вероятность определена на алгебре  $\mathfrak{F}$ , то аксиома 4 опускается. Совокупность  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  называют вероятностным пространством.

В примере 1 §3  $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^6$ . Множество всех подмножеств  $\Omega$  будет алгеброй событий  $\mathfrak{F}$ . Любое случайное событие  $A \in \mathfrak{F}$  можно записать так  $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{ik}\}$ . Событие  $A$  содержит  $k$  ( $0 \leq k \leq 6$ ) элементарных событий. При этом при  $k=0$   $A = \emptyset$ , при  $k=1$   $A = \omega_i$ , при  $k=6$   $A = \Omega$ . Событие  $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ , например, означает выпадение четного числа очков. Здесь  $\omega_{i1} = \omega_2$ ,  $\omega_{i2} = \omega_4$ ,  $\omega_{i3} = \omega_6$ . Положим

$$P(A) = \frac{k}{n}, \quad (1)$$

где  $n=6$ . Можно убедиться (сделать это самостоятельно), что функция (1) удовлетворяет аксиомам 1-3 опр.2 и, следовательно, является вероятностью. При  $k=1$  из (1)

получим  $P(\omega_i) = \frac{1}{6}$ ,  $i=1, 2, \dots, 6$ . Это означает, что все

исходы опыта равновозможные. Поскольку каждое элементарное событие, входящее в  $A$ , является для него благоприятным, то формула (1) совпадает с классическим определением вероятности (см. §2). Используя (1), найдем

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

**Замечание.** Система аксиом 1-3 определяет вероятность не однозначно. Действительно, выберем шесть чисел  $p_i \geq 0$  так,

чтобы  $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$ , и событию  $A = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{ik}\}$  поставим в

соответствие значение функции

$$P(A) = p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ik}. \quad (2)$$

Можно убедиться, что функция (2) удовлетворяет аксиомам 1-3 опр.2, т.е. является вероятностью. Если

$p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$ , то функция (2) совпадает с функцией (1).

Если, например,  $p_1 = p_2 = \dots = p_5 = 0$ ,  $p_6 = 1$ , то согласно (2)  $P(B) = p_2 + p_4 + p_6 = 1$ . Видимое противоречие (ранее мы нашли

$P(B) = \frac{1}{2}$ ) на самом деле таковым не является. Согласно (2)

$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_5) = 0$ ,  $P(\omega_6) = 1$ . Это означает, что исходы опыта теперь неравновероятны, что возможно, если кубик неправильный, несимметричный. Если, например, его склеить из плотной бумаги и на грань с одним очком наклеить свинцовую пластину, то при любом бросании противоположная грань с шестью очками будет верхней.

В пр. 3 §3  $\Omega = \{x: x \geq 0\}$  – правая полуось системы координат. Элементарные события  $\omega = \{x: 0 \leq x \leq \omega\}$  являются отрезками этой полуоси. Если к ним добавить все разности

этих отрезков (вычитать будем из большего меньший), то получим алгебру  $\mathfrak{Z}$ . Функцию  $P(A)$  зададим интегралом

$$P(A) = \int_A e^{-x} dx. \quad (3)$$

Интегрирование в (3) производится по объединению всех отрезков, каковым является событие  $A$ . Можно убедиться что (3) является вероятностью. Пусть  $A = \{x: 1 \leq x \leq 2\}$ , что можно толковать как отказ прибора между первым и вторым годом эксплуатации. Тогда

$$P(A) = \int_1^2 e^{-x} dx \approx 0,23.$$

В пр. 4 §3  $\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq r^2\}$  - круг радиуса  $r$ . Всякая область круга - случайное событие  $A$ . Элементарные события будем считать равновероятными. Однако, воспользоваться классическим определением вероятности нельзя, т.к. общее число событий и число благоприятных событий бесконечное. В этом случае используют так называемую геометрическую вероятность. Положим

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{кр}}. \quad (4)$$

Здесь  $S_A$  - площадь части круга, соответствующей событию  $A$ , а  $S_{кр}$  - площадь всей мишени. Можно доказать, что (4) является вероятностью. В общем случае равновероятных исходов опыта геометрическая вероятность определяется формулой

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \quad (5)$$

Где  $\mu(A)$  - мера множества  $A$ . Если множество  $A$  конечное, то мера совпадает с числом его элементов, если  $A$  - отрезок, то мера совпадает с длиной отрезка, если  $A$  - часть плоскости - с площадью и т.д.

Рассмотрим теперь следствия из определения 2.

**Следствие 1.**  $P(\bar{A})=1-P(A)$ . Действительно,  $A+\bar{A}=\Omega$ , события  $A$  и  $\bar{A}$  несовместны, согласно аксиоме 3  $P(A)+P(\bar{A})=1$ . Следствие доказано.

**Следствие 2.** (теорема сложения вероятностей).

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \quad (6)$$

**Доказательство.** Представим события  $A+B$  и  $B$  в виде суммы несовместных событий.  $A+B=A+B\bar{A}$  (см. диаграмму Венна),  $B=B(A+\bar{A})=BA+B\bar{A}$ . Воспользуемся аксиомой 3.  $P(A+B)=P(A)+P(B\bar{A})$ ,  $P(B)=P(BA)+P(B\bar{A})$ . Подставляя выражение  $P(B\bar{A})$  из второй формулы в первую, получим (6). Следствие доказано. Теорема обобщается на сумму  $n$  событий.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{k<l} P(A_k A_l) + \sum_{k<l<m} P(A_k A_l A_m) + \dots \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \quad (7)$$

**Следствие 3.** Если  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  и  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ , то

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad (\text{без доказательства}).$$

## **§5. Условная вероятность. Независимость событий**

Рассмотрим два опыта – стрельбу по мишени без коррекции и с коррекцией. Интуитивно ясно, что вероятность попадания в мишень при втором выстреле не будет зависеть от результата первого выстрела, если стрелок не будет знать этого результата (стрельба без коррекции). Если стрелок будет знать результат первого выстрела, то он может исправить свою ошибку, и вероятность попасть в мишень при втором выстреле будет

зависеть от результата первого выстрела (стрельба с коррекцией).

**Определение 1.** Событие  $A$  назовем *независимым* от события  $B$ , если вероятность появления события  $A$  не зависит от того, произошло событие  $B$  или нет. В противном случае событие  $A$  назовем *зависимым* от события  $B$ . Вероятность события  $A$ , вычисленная при условии, что событие  $B$  произошло, назовем *условной вероятностью* и обозначим  $P(A/B)$ . Условие независимости события  $A$  от события  $B$  можно записать так

$$P(A/B)=P(A). \quad (1)$$

Заметим, что приведенное определение формально таковым не является, т.к. основано на интуитивном понятии времени (событие произошло, не произошло), а понятие времени в определении вероятности не входит. Все выше изложенное формально можно ввести так.

**Определение 2.** Пусть  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  – произвольное вероятностное пространство. Если  $A \in \mathfrak{F}$ ,  $B \in \mathfrak{F}$ ,  $P(B) > 0$ , то число

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (2)$$

называется *условной вероятностью* события  $A$  при условии  $B$ .

Аналогично  $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ , (3)

если  $P(A) > 0$ .

**Определение 3.** События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (4)$$

События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются *независимыми* (в совокупности), если  $P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k)$ . (5)



**Следствие.** Если А и В независимые, то

$$P(A/B)=P(A), P(B/A)=P(B). \quad (6)$$

Действительно, подставляя (4) в (2) и в(3), получим (6).

Заметим, что (6) совпадает с (1).

Перепишем (2) и (3) в виде

$$P(AB)=P(A) P(B/A)=P(B) P(A/B). \quad (7)$$

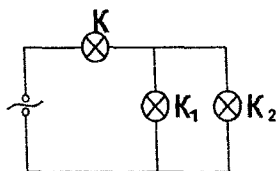
Равенство (7) носит название теоремы умножения вероятностей, хотя и не является теоремой. Формула (7) обобщается на n сомножителей

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)=P(A_1) P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 A_2)\dots P(A_n/A_1 A_2\dots A_{n-1}). \quad (8)$$

Теоремой умножения можно воспользоваться, для вычисления вероятности от произведения событий, если условная вероятность известна или может быть вычислена, без использования формул (2, 3).

Если требуется найти вероятность события А, то поступают следующим образом. Выражают событие А через сумму и произведение событий, вероятности которых известны или могут быть легко найдены, а затем применяют теоремы сложения и умножения.

**Пример 1.** Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента К или двух элементов  $K_1$  и  $K_2$ , которые выходят из строя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,3; 0,2; 0,2. Определить вероятность разрыва электрической цепи.



**Решение.** Пусть К,  $K_1$ ,  $K_2$  и А – события,

означающие выход из

строю соответствующих элементов и разрыв цепи.

Тогда  $A = K + K_1K_2$ ,  $P(K) = 0,3$ ,  $P(K_1) = P(K_2) = 0,2$ .

Воспользуемся теоремами сложения и умножения.

Получим:

$$P(A) = P(K) + P(K_1K_2) - P(KK_1K_2) = P(K) + P(K_1)P(K_2) -$$

$$P(K)P(K_1)P(K_2) = 0,328.$$

Мы учли, что события  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  независимые, но совместные.

**Пример 2.** Двое по очереди бросают монету. Определить вероятность выигрыша для каждого игрока, если выигрывает тот, у кого раньше появится герб.

**Решение.** Пусть события  $A_n, B_n$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$  означают появление герба у первого и второго игроков при  $n$ -ом бросании. Очевидно,  $P(A_n) = P(B_n) = \frac{1}{2}$ . Пусть события  $A$  и  $B$

означают выигрыши первого и второго игроков. Тогда

$A = A_1 + \overline{A_1}B_1A_2 + \overline{A_1}\overline{B_1}A_2B_2A_3 + \dots$ . Все слагаемые – события несовместные, а сомножители – события независимые, поэтому  $P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{2}{3}$ .

Поскольку  $B = \overline{A}$ , то  $P(B) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$ .

## **§6. Формулы полной вероятности и Байеса**

Пусть  $H_1, H_2, \dots, H_n$  – некоторые попарно несовместные события и пусть  $A \subset H_1 + H_2 + \dots + H_n$ . Тогда  $A(H_1 + H_2 + \dots + H_n) = A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n$ , т.е. мы представили событие  $A$  в виде суммы попарно несовместных событий. Применяя теоремы сложения и умножения, получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i, A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i). \quad (1)$$

Формула (1) называется формулой полной вероятности. В реальном опыте  $H_i$  образуют полную группу несовместных событий и называются гипотезами.

**Пример 1.** В первой урне 10 шаров, из них 4 белых; во второй урне 8 шаров, из них 5 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили его во вторую. Затем из второй урны наудачу извлекли один шар. Какова вероятность, что извлеченный из второй урны шар белый?

**Решение.** Пусть событие  $A$  означает, что из второй урны извлечен белый шар. Введем гипотезы:  $H_1$ -переложили белый шар,  $H_2$ -переложили небелый шар. События  $H_1$  и  $H_2$  несовместны, образуют полную группу событий, а событие  $A$  может осуществиться только с одной из них, т.е.  $A \subset H_1 + H_2$ . Воспользуемся формулой (1). Поскольку все исходы опыта извлечения шара из урны, равновозможные (на это указывает слово «наудачу»), то воспользуемся классическим определением вероятности. Всего случаев  $n=10$ , благоприятных гипотезе  $H_1$  четыре, а гипотезе  $H_2$  – шесть. Поэтому  $P(H_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ,  $P(H_2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ .

Если произошло событие  $H_1$ , то во второй урне из 9 шаров будет 6 белых, следовательно  $P(A/H_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ . Если произошло событие  $H_2$ , то во второй урне из 9 шаров останется 5 белых, следовательно,  $P(A/H_2) = \frac{5}{9}$ . Подставляя

все найденные значения в (1), получим

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{3}{5}.$$

Задача решена.

Воспользуемся определением условной вероятности

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)}. \quad (2)$$

Используя теорему умножения и формулу полной вероятности, из (2) получим

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)}. \quad (3)$$

Равенство (3) носит название формулы Байеса. Она определяет вероятность гипотезы после того, как произошло событие А.

**Пример 2.** В первой урне 10 шаров, из них 4 белых; во второй урне 8 шаров из них 5 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили его во вторую. Затем из второй урны наудачу извлекли один шар. Он оказался белым. Что вероятнее, из первой урны во вторую был переложён белый или небелый шар?

**Решение.** Введем те же гипотезы  $H_1$ ,  $H_2$  и то же событие А, что и в задаче примера 1. Чтобы решить задачу, нам нужно найти условные вероятности  $P(H_1/A)$  и  $P(H_2/A)$  и сравнить их. Воспользуемся формулой Байеса (3) и результатами примера 1. Получим

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{9},$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{9}.$$

Т.к.  $P(H_2/A) > P(H_1/A)$ , то вероятнее, что из первой урны во вторую был переложён небелый шар.

## § 7. Последовательности испытаний. Формулы Бернулли и Пуассона

Будем считать, что опыт (испытание) имеет только два исхода: успех, неудача. Рассмотрим серию (последовательность) из  $n$  таких испытаний. Например,  $n$  выстрелов по мишени, успех – попадание в мишень, неудача – промах. Рассмотрим самую простейшую последовательность испытаний, когда вероятность успеха  $p$  не меняется от испытания к испытанию, а сами испытания являются независимыми. Такие испытания называются испытаниями Бернулли.

В нашем примере это означает, что стрельба ведется без коррекции (испытания независимые) и в неизменных условиях. Если условия проведения испытаний меняются (например, стрельба по удаляющейся мишени), то вероятность успеха  $p_i$  будет зависеть от порядкового номера испытания, хотя сами испытания могут оставаться независимыми. Если стрельба ведется с коррекцией (испытания зависимые), то условная вероятность успеха будет зависеть от результатов всех предыдущих успехов и неудач. Как правило, стрелок реагирует только на результат одного предыдущего  $(i-1)$ -го выстрела. Такие последовательности испытаний называются простой цепью Маркова, т. е. в простой цепи Маркова условная вероятность исхода  $i$ -го опыта зависит только от результата  $(i-1)$ -го опыта.

Вернемся к испытаниям Бернулли. Пусть событие  $B_k$  означает, что в  $n$  независимых испытаниях успех выпал ровно  $k$  раз, а неудача, соответственно,  $(n-k)$  раз. Это событие может осуществиться с одним из следующих благоприятных событий.

$$\omega_1 = A_1 A_2 \dots A_k \bar{A}_{k+1} \bar{A}_{k+2} \dots \bar{A}_n,$$

$$\omega_2 = A_1 A_2 \dots \bar{A}_k \bar{A}_{k+1} \bar{A}_{k+2} \dots A_n, \quad (1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\omega_N = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-k} A_{n-k+1} \dots A_n.$$

Здесь  $A_i$  – успех в  $i$ -ом испытании,  $\bar{A}_i$  – неудача. При этом  $P(A_i)=p$ ,  $P(\bar{A}_i)=1-p=q$ . Можно доказать, что число всех благоприятных событий  $N=C_n^k$ . Сомножители в событиях  $\omega_i$  независимые, поэтому по теореме умножения найдем

$$P(\omega_i) = p^k q^{n-k}. \quad (2)$$

Очевидно,  $B_k = \sum_{i=1}^N \omega_i$ . (3)

Слагаемые  $\omega_i$  в (3) несовместные, поэтому по теореме сложения и с учетом (2), получим

$$P(B_k) = P_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (4)$$

Равенство (4) называется формулой Бернулли.

**Пример.** Вероятность, что изделие бракованное, равна 0,003. Чему равна вероятность того, что из 1000 наугад взятых изделий бракованных окажется а) ровно 5, б) хотя бы одно?

**Решение.** а)  $P_{5,1000} = C_{1000}^5 (0,003)^5 \cdot (0,997)^{995}$ .

б). Пусть  $B_0$  означает ни одного бракованного изделия. Тогда  $P(B_0) = P_{0,1000} = C_{1000}^0 p^0 \cdot q^{1000} = (0,997)^{1000}$ .

Событие  $\bar{B}_0$  означает хотя бы одно изделие бракованное.

$$P(\bar{B}_0) = 1 - P(B_0) = 1 - (0,997)^{1000}.$$

Как видно, задача решается просто, но вычисления в данном случае трудно выполнить. В таких случаях пользуются приближенными, но более удобными для вычислений формулами.

**Теорема (Пуассон).** Если  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ ,  $(np) \rightarrow a \neq 0$ , то

$$P_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k} \rightarrow \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \quad (5)$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p^k q^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k!} n(n-1)\dots(n-(k-1)) \right) p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \left( (np)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right) (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{a^k}{k!} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \left( (1-p)^p \right)^{np-kp} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \text{ Теорема доказана.} \end{aligned}$$

Из теоремы Пуассона видно, что при больших  $n$  и малых  $p$  можно пользоваться приближенной формулой

$$P_{k, n} \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad a = np. \quad (6)$$

В нашем примере  $a = np = 3$  и по формуле (6) получим

$$P_{5, 1000} \approx \frac{3^5}{5!} e^{-3} \approx 0,1008, \quad 1 - P_{0, 1000} = 1 - e^{-3} \approx 0,95.$$

## **§8. Случайная величина. Функция распределения и плотность распределения**

Одним из важнейших понятий в теории вероятностей является понятие случайной величины. Это переменная величина, которая может принять то или иное значение с определенной вероятностью. Приведем некоторые примеры. Пусть произведено  $n$  выстрелов по мишени. Число попаданий в мишень есть дискретная случайная величина  $\xi$ . Она может принять следующие значения: 0, 1, 2, ...,  $n$ . Эти значения называются возможными значениями случайной величины  $\xi$ .

Для того, чтобы задать случайную величину, мало указать ее возможные значения, следует еще дать соответствующие вероятности. Считая испытания (выстрелы) независимыми,

воспользуемся формулой Бернулли. Тогда вероятность того, что случайная величина  $\xi$  примет значение равное  $k$  будет

$$P(\xi=k)=p_k=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n.$$

где  $p$ - вероятность попадания при одном выстреле.

Таблица, в которой приведены возможные значения дискретной случайной величины  $\xi$  и соответствующие вероятности, называется *рядом распределения* этой случайной величины. Если случайная величина задана, то говорят, что задан закон ее распределения. Закон распределения может быть задан рядом распределения, формулой, определяющей возможные значения и соответствующие вероятности, и другими способами.

Примером непрерывной случайной величины  $\xi$  является срок безотказной службы прибора. Возможными значениями этой случайной величины являются все числа луча  $0 \leq x < \infty$ . Мы будем рассматривать только дискретные и непрерывные случайные величины, хотя есть случайные величины, которые не являются ни дискретными, ни непрерывными. Уточним теперь понятие случайной величины.

**Определение 1.** Пусть  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  – вероятностное пространство. Всякая вещественная функция  $\xi(\omega)$ , заданная на пространстве элементарных событий  $\Omega = \{\omega\}$ , называется случайной величиной, если множество элементарных событий  $\omega$ , для которых  $\xi(\omega) < x$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , принадлежит к  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{F}$ , т.е.

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}. \quad (1)$$

Заметим, что условие (1) означает только, что для всякого  $x$  должна быть определена вероятность события  $\xi(\omega) < x$ .

**Определение 2.** Если множество значений функции  $\xi(\omega)$  конечно или счетно, то случайная величина  $\xi(\omega)$  называется *дискретной*.



Итак, согласно определению 1, для всякого  $x \in (-\infty, +\infty)$  событию  $\xi < x$  приписывается вероятность  $P(\xi < x)$ , другими словами эта вероятность является функцией переменной  $x$ .

**Определение 3.** Функция действительной переменной  $x$ , определенная равенством

$$F(x) = P(\xi < x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (2)$$

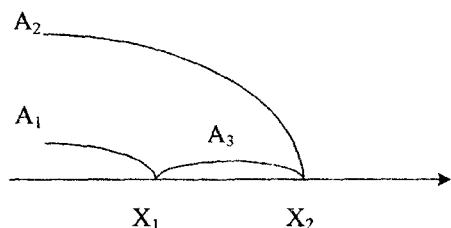
называется *функцией распределения случайной величины  $\xi(\omega)$* .

Если задана функция распределения  $F(x)$ , то задан и закон распределения, т.е. вероятность любого события из  $\mathfrak{F}$  можно выразить через значения функции  $F(x)$ . Выразим в частности вероятности событий  $\xi \geq x$ ,  $x_1 \leq \xi < x_2$ ,  $\xi = x$  через функцию распределения  $F(x)$ . Пусть  $A = (\xi < x)$ , тогда  $\bar{A} = (\xi \geq x)$ ,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - P(\xi < x) = 1 - F(x)$ .

Итак,

$$P(\xi \geq x) = 1 - F(x). \quad (3)$$

Пусть  $A_1 = (\xi < x_1)$ ,  $A_2 = (\xi < x_2)$  и  $A_3 = (x_1 \leq \xi < x_2)$ , ( $x_1 < x_2$ ).



Тогда  $A_2 = A_1 + A_3$ .

Так как события  $A_1$  и  $A_3$  несовместны, то по теореме сложения найдем

$$P(A_2) = P(A_1) + P(A_3)$$

или

$$P(A_3) = P(A_2) - P(A_1),$$

или  $P(x_1 \leq \xi < x_2) = P(\xi < x_2) - P(\xi < x_1)$ . Согласно (2), получим

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (4)$$

Пусть  $A_n = (x \leq \xi < x + \frac{1}{n})$ . Очевидно,  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n$ ,  $A_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$ .

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = (\xi = x). \quad P(A) = P(\xi = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(x + \frac{1}{n}) - F(x))$$

$F(x) = F(x+0) - F(x)$  (см. следствие 3 §4). Итак,

$$P(\xi = x) = F(x+0) - F(x), \quad (5)$$

т.е. вероятность события ( $\xi=x$ ) равна разности предела справа и значения функции распределения в точке  $x$ .

**Определение 4.** Случайная величина  $\xi(\omega)$  называется *непрерывной*, если существует неотрицательная функция  $f(x)$ , такая что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du. \quad (6)$$

Функция  $f(x)$  называется плотностью распределения непрерывной случайной величины  $\xi(\omega)$ , а ее график называется кривой распределения.

Известно (см. §8, гл.4, ч.1), что если интеграл (6) существует, то  $F(x)$  непрерывная функция, причем

$$F'(x) = f(x) \quad (7)$$

в точках непрерывности функции  $f(x)$ . Таким образом, непрерывная случайная величина имеет непрерывную функцию распределения  $F(x)$ . Плотность распределения  $f(x)$  непрерывной случайной величины может иметь разрывы. Дискретная случайная величина имеет разрывную функцию распределения, а плотность распределения ее не существует. Однако с помощью специальной  $\delta$ -функции можно ввести понятие обобщенной плотности распределения и для дискретной случайной величины. Если  $x_i$  – возможные значения дискретной случайной величины, а  $p_i = P(\xi=x_i)$  – соответствующие вероятности, то плотность распределения дискретной случайной величины можно записать так:

$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i). \quad (8)$$

Под  $\delta$ -функцией понимают такую функцию, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (9)$$

### **§9. Свойства функции распределения и плотности распределения**

Продолжим рассмотрение свойств функции распределения. Т.к., согласно определению, вероятность не может быть отрицательным числом, то из (4) §8 следует, что для любых  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_2 > x_1$ )

$$F(x_2) - F(x_1) \geq 0, \text{ или } F(x_2) \geq F(x_1), \quad (1)$$

т.е. функция распределения случайной величины есть неубывающая функция.

Т.к. событие  $(\xi < -\infty) = \emptyset$ , а событие  $(\xi < +\infty) = \Omega$ , то  $P(\xi < -\infty) = F(-\infty) = 0$ , а  $P(\xi < +\infty) = F(+\infty) = 1$ . Можно доказать, что  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$ , а  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$ ,  $0 \leq F(x) \leq 1$ . (2)

Из (1) и (2) ясно, что функция распределения монотонно возрастает от нуля до единицы.

Если случайная величина непрерывная, то ее функция распределения также непрерывная. Пусть дискретная случайная величина задана рядом распределения

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline p & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{array},$$

причем  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  и  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Согласно определению

функции распределения  $F(x_1) = P(\xi < x_1) = P(\emptyset) = 0$ , при этом  $F(x) = 0 \quad \forall x \leq x_1$ . Очевидно, если  $x \leq x_2$ , то  $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = x_1) = p_1$ . Если  $x \leq x_k$ , то  $F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{k-1}$ , а если  $x > x_n$ ,

то  $F(x) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Как видно, функция распределения

дискретной случайной величины, принимающей конечное число возможных значений, является кусочно непрерывной ступенчатой функцией, скачками увеличивающейся на  $p_i$  в точках возможных значений  $x_i$ . Если случайная величина задана рядом распределения, то ее функцию распределения можно записать с помощью функции Хевисайда

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \text{ следующим образом:}$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^n p_i \eta(x - x_i). \quad (3)$$

Можно доказать, что функция распределения является непрерывной слева, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0 - 0) = F(x_0). \quad (4)$$

Если случайная величина непрерывная, то из (5) § 8 следует

$$P(\xi = x) = F(x+0) - F(x) = F(x) - F(x) = 0, \quad (5)$$

т.е. вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, равное  $x$ , равна нулю. Этот вывод справедлив и для дискретной случайной величины, если  $x$  не совпадает ни с одним из возможных значений случайной величины. При  $x = x_i$  ( $x_i$  – возможное значение) имеем

$$P(\xi = x_i) = F(x_i + 0) - F(x_i) = p_i. \quad (6)$$

Следствием из (5) и (4) § 8 являются равенства

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = P(x_1 \leq \xi < x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) \quad (7)$$

для непрерывной случайной величины.

Отметим следующие свойства плотности распределения:

1)  $f(x) \geq 0$ ;

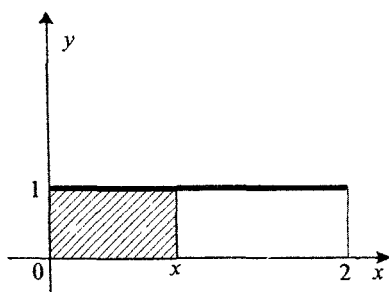
2)  $P(x_1 \leq \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ ;

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1;$$

4)  $P(x < \xi < x + dx) = f(x) dx = dF(x)$  в точках непрерывности функции  $f(x)$ .

**Пример 1.** В прямоугольник (см. рис.) наугад бросается точка. Для случайной величины  $\xi(\omega) = x$ , абсциссы брошенной точки, найти функцию распределения  $F(x)$ .

**Решение.** Каждую точку данного прямоугольника назовем



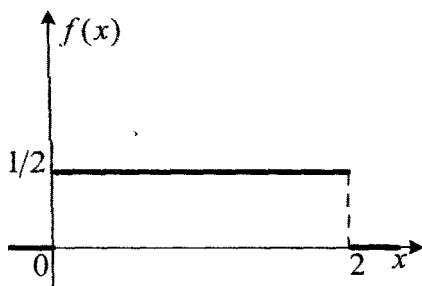
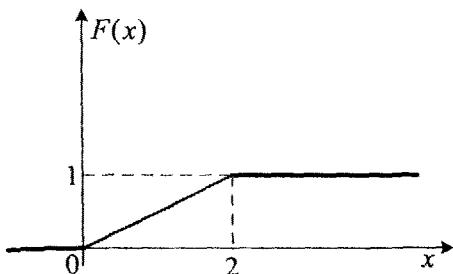
элементарным событием  $\omega$ . Множество всех точек

прямоугольника будет пространством  $\Omega$  элементарных событий. Всякая область прямоугольника – случайное событие  $A$ , а отношение площади этой области к площади всего прямоугольника будет вероятностью события  $A$ . Возможные значения случайной величины  $\xi(\omega) = x$  – все действительные числа отрезка  $[0; 2]$ . Если  $0 \leq x \leq 2$ , то событию  $(\xi < x)$  отвечает заштрихованная область (см. рис.).

Ее площадь равна  $x$ , а вероятность  $P(\xi < x) = \frac{1}{2}x$ .

Согласно определению  $F(x) = P(\xi < x)$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Если  $x \leq 0$ , то событие  $(\xi < x) = \emptyset$  и  $F(x) = 0$ . Если  $0 < x \leq 2$ , то  $F(x) = 0,5x$ , если  $x > 2$ , то событие  $(\xi < x) = \Omega$  и  $F(x) = 1$ . Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,5x, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$



Найдем плотность распределения случайной величины  $\xi(\omega)=x$ .

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0,5, & 0 < x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Как видно, функция  $f(x)$  имеет разрывы первого рода в точках  $x=0$  и  $x=2$ . Данная случайная величина непрерывная и распределена по закону равномерной плотности.

**Пример 2.** По мишени произведено 3 выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле

$p=0,6$ . Для случайной величины  $\xi$ , числа попаданий в мишень, найти функцию распределения.

**Решение.** Очевидно, случайная величина  $\xi$  принимает только 4 значения: 0, 1, 2, 3. Вероятность событий ( $\xi=k$ ),  $k=0, 1, 2, 3$  найдем по формуле Бернулли

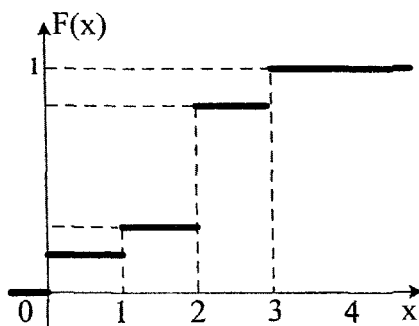
$$P(\xi=k)=p_k=C_3^k p^k q^{3-k}.$$

Тогда

$$p_0=0,4^3=0,064, \quad p_1=3 \cdot 0,6 \cdot 0,4^2=0,288, \quad p_2=3 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4=0,432, \\ p_3=0,6^3=0,216.$$

Построим ряд распределения случайной величины  $\xi$ .

$x_k$	0	1	2	3
$p_k$	0,064	0,288	0,432	0,216



Функция распределения данной дискретной случайной величины определяется формулой (3).

$$F(x) = \sum_{k=0}^3 p_k \eta(x - x_k) =$$

$$0,064\eta(x) + 0,288\eta(x-1) + 0,432\eta(x-2) + 0,216\eta(x-3).$$

Обобщенную плотность данной дискретной случайной величины можно записать так:

$$f(x) = \sum_{k=0}^3 p_k \delta(x - x_k).$$

## **§ 10. Числовые характеристики случайной величины**

Во многих практических задачах знание функции распределения  $F(x)$  не обязательно, достаточно знать некоторые средние характеристики случайной величины. Эти характеристики называются числовыми. Самыми распространенными из них являются начальные и центральные моменты различных порядков.

**Определение 1.** Начальным моментом  $k$ -го порядка случайной величины  $\xi$  называют число, определяемое формулой

$$\alpha_k[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, \quad (1)$$

где  $f(x)$  – плотность распределения случайной величины  $\xi$ . Очевидно, в определении подразумевается непрерывная случайная величина, однако это определение справедливо и для дискретной случайной величины, если под  $f(x)$  понимать обобщенную плотность распределения. Подставляя в (1) равенство (8) §8, после некоторого преобразования получим более удобную формулу для дискретной случайной величины

$$\alpha_k[\xi] = \sum_i x_i^k p_i. \quad (2)$$

Если число возможных значений  $x_i$  дискретной случайной величины конечное, то (2) – конечная сумма, если число  $x_i$  счетное, то это ряд. Он определяет начальный момент  $k$ -го порядка, если сходится абсолютно. Требование



абсолютной сходимости накладывается и на несобственный интеграл (1).

Среди начальных моментов самым употребительным является первый начальный момент, который называется математическим ожиданием и обозначается  $\alpha_1[\xi]=M[\xi]=m_\xi$ . Из (1) и (2) при  $k=1$  получим

$$m_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \quad (1')$$

$$m_\xi = \sum_i x_i p_i. \quad (2')$$

Если в пространстве расположено  $n$  материальных точек с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , то координата  $x_c$  центра масс этой системы материальных точек находится, как известно, по формуле

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (3)$$

Если  $\sum_{i=1}^n m_i = 1$ , то формула (3) совпадает с формулой (2'). По

аналогии с механикой математическое ожидание называют центром распределения или средним значением случайной величины. Второй начальный момент случайной величины  $\xi$  аналогичен моменту инерции системы материальных точек.

**Пример.** Найти математическое ожидание числа попаданий в мишень при трех выстрелах (см. пр. 2 §9).

**Решение.** Согласно формуле (2'), получим

$$m_\xi = 0 \cdot 0,064 + 1 \cdot 0,288 + 2 \cdot 0,432 + 3 \cdot 0,216 = 1,8.$$

Этот результат можно истолковать так. Если производить серии по 30 выстрелов, то попаданий в среднем будет 18.

**Определение 2.** Центральным моментом  $k$ -го порядка случайной величины  $\xi$  называют число, определяемое формулой

$$\mu_k[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^k f(x) dx, \quad (4)$$

где  $f(x)$  – плотность распределения случайной величины  $\xi$ , а  $m_\xi$  – ее математическое ожидание.

Для дискретной случайной величины формулу (4) удобнее записать иначе

$$\mu_k[\xi] = \sum_i (x_i - m_\xi)^k p_i. \quad (5)$$

Легко убедиться, что  $\mu_1[\xi]=0$ . Действительно  $\mu_1[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx - m_\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = m_\xi - m_\xi = 0$ .

Наиболее употребительным из центральных моментов является второй. Он называется дисперсией и обозначается  $\mu_2[\xi]=D[\xi]=D_\xi$ . Из (4) и (5) при  $k=2$  получим

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 f(x) dx, \quad (4')$$

$$D_\xi = \sum_i (x_i - m_\xi)^2 p_i. \quad (5')$$

*Дисперсия* – это среднее значение квадрата отклонения случайной величины  $\xi$  от центра распределения  $m_\xi$ . Если извлечь квадратный корень из дисперсии, получим среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi}. \quad (6)$$

Из (4) видно, что если кривая распределения  $f(x)$  будет симметрична относительно  $m_\xi$ , то все нечетные центральные моменты обратятся в нуль. Поэтому  $\mu_3[\xi]$  характеризует степень асимметрии кривой распределения.

Для удобства  $\mu_3$  делят на  $\sigma_\xi^3$  и называют *коэффициентом асимметрии*

$$a_\xi = \frac{\mu_3}{\sigma_\xi^3}. \quad (7)$$

Иногда вводят еще эксцесс

$$e_\xi = \frac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} - 3. \quad (8)$$

Моменты более высоких порядков используются редко.

Кроме моментов используют и другие числовые характеристики, например, моду и медиану.

*Модой*  $M_0$  случайной величины  $\xi$  называют ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины это точка, в которой кривая распределения достигает максимума. Если максимумов несколько, то распределение называют *многомодальным*, если максимума нет, а есть минимум, то – *антимодальным*.

*Медианой*  $M_d$  называют точку, определяемую равенством  $P(\xi < M_d) = P(\xi > M_d)$ . (9)

Заметим, что моменты  $k$ -го порядка можно рассматривать как математическое ожидание от  $k$ -ой степени случайной величины  $\xi$  или *центрированной* случайной величины  $(\xi - m_\xi)$ , т.е.

$$\alpha_k[\xi] = M[\xi^k], \quad \mu_k[\xi] = M[(\xi - m_\xi)^k]. \quad (10)$$

Математическое ожидание и дисперсия обладают следующими свойствами:

- 1)  $M[C] = C, C = \text{const}$ ;
- 2)  $M[C\xi] = CM[\xi]$ ;
- 3)  $D[C] = 0, C = \text{const}$

$$4) D[C\xi]=C^2D[\xi];$$

$$5) D_{\xi}=\alpha_2[\xi]-m_{\xi}^2.$$

Докажем пятое свойство.  $D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 f(x) dx$

$$\begin{aligned} D_{\xi} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xm_{\xi} + m_{\xi}^2) f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2m_{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + \\ &+ m_{\xi}^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \alpha_2[\xi] - 2m_{\xi}^2 + m_{\xi}^2 = \alpha_2[\xi] - m_{\xi}^2. \quad \text{Ч. т. д.} \end{aligned}$$

## **§11. Элементы математической статистики.**

### **Основные понятия**

*Математическая статистика* – это раздел теории вероятностей. Занимается она сбором и обработкой опытных данных, т.е. прикладными задачами теории вероятностей.

Как уже отмечалось в §2, частота появления случайного события стремится к вероятности этого события, если число испытаний неограниченно растет. Поэтому на практике, когда вероятность неизвестна, ее заменяют на частоту, получаемую экспериментально. Говорят, что частота  $p^*$  является оценкой вероятности  $p$ , т.е. ее приближенным значением.

Основной задачей математической статистики является оценка закона распределения случайной величины или числовых характеристик, если в законе распределения нет необходимости.

Пусть при неоднократном измерении некоторой случайной (или неслучайной) величины мы получили серию из  $n$  результатов  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . В силу неизбежных случайных

ошибок измерения не все результаты измерений одной и той же величины будут совпадать друг с другом.

Очевидно, любое измерение  $x_i$  можно считать оценкой измеряемой величины, если она неслучайная, или оценкой ее математического ожидания, если это случайная величина  $\xi$ . Однако, интуитивно ясно, что среднее арифметическое  $n$  измерений

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

будет более точной оценкой математического ожидания  $m_\xi$  случайной величины  $\xi$ . Среднее арифметическое  $\bar{x}$  обычно и берут в качестве оценки математического ожидания, т.е.  $m_\xi \approx \bar{x}$ .

Оценкой начальных моментов  $k$ -го порядка  $\alpha_k[\xi]$  служат соответствующие статистические моменты  $\alpha_k^*$ , т.е.

$$\alpha_k[\xi] \approx \alpha_k^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k. \quad (2)$$

Оценкой центральных моментов  $\mu_k[\xi]$  служат соответствующие статистические центральные моменты

$$\mu_k^*, \text{ т.е. } \mu_k[\xi] \approx \mu_k^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k. \quad (3)$$

Если известно математическое ожидание  $m_\xi$ , то в качестве оценки  $\mu_k[\xi]$  лучше взять величину

$$m_k^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_\xi)^k. \quad (4)$$

**Определение.** Статистической функцией распределения  $F^*(x)$  случайной величины  $\xi$  называют частоту события  $(\xi < x)$ , т.е.

$$F^*(x) = P^*(\xi < x), \quad (5)$$

где  $P^*(\xi < x)$  - частота события  $(\xi < x)$ .

Чтобы найти значение  $F^*(x)$ , нужно подсчитать число испытаний (измерений), в которых величина  $\xi$  принимает

значение меньше  $x$ , и разделить это число на общее число испытаний  $n$ .

Аналитически статистическую функцию распределения можно записать так

$$F^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta(x - x_i), \quad (5')$$

где  $\eta(x)$  – функция Хевисайда.

Очевидно, и для дискретной, и для непрерывной случайной величины  $\xi$  функция  $F^*(x)$  будет ступенчатой, разрывной в точках  $x_i$ . Все свойства функции распределения  $F(x)$  справедливы и для статистической функции распределения  $F^*(x)$ . Поскольку частота события ( $\xi < x$ ) стремится к вероятности этого события, то естественно в качестве оценки функции  $F(x)$  взять функцию  $F^*(x)$ .

Повторим серию независимых измерений случайной величины  $\xi$  и, в силу случайных ошибок, вместо прежней серии измерений ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) получим новую ( $x_1', x_2', \dots, x_n'$ ). Отсюда ясно, что серию измерений ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) можно рассматривать как случайный вектор, а его координаты  $x_i$  как случайные величины, имеющие тот же закон распределения, что и измеряемая случайная величина  $\xi$ . Ясно также, что все статистические моменты являются величинами случайными. При оценке числовых характеристик мы заменяем точные значения на случайные величины. Указать предельную погрешность, которую мы совершаем при этом, мы не можем, т.к. она не имеет смысла. Однако методы статистики, которые мы рассмотрим позже, позволяют найти вероятность такой погрешности.

Случайный вектор  $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называют *выборкой* из генеральной совокупности. Под *генеральной совокупностью* понимают всю бесконечную мыслимую совокупность измерений. Приведем другой пример. Пусть необходимо узнать средний бюджет жителей Таганрога.

Для этого придется опросить всех жителей города. Они и представляют собой генеральную совокупность. Т.к. опросить всех жителей города задача трудоемкая и дорогостоящая, то делают случайную выборку, т.е. опрашивают только некоторую часть жителей города, но результат опроса распространяется на всех. Ясно, что результаты эти будут случайными.

Обработать выборку можно различными способами. Если измерения  $x_i$  упорядочить по величине, расположив в порядке неубывания, то полученную выборку называют *вариационным рядом*. Разность  $R=x_{\max}-x_{\min}$  называется *размахом выборки*. Если в вариационном ряде оставить только различные измерения, но указать их частоту повторения, то получим статистический ряд.

Если объем выборки велик, то весь интервал выборки разбивают на несколько разрядов. Подсчитывают число измерений, попавших в каждый разряд, вычисляют частоту каждого разряда, т.е. отношение числа измерений в разряде к числу всех измерений выборки, и все это сводят в таблицу, которая называется *группированным статистическим рядом*.

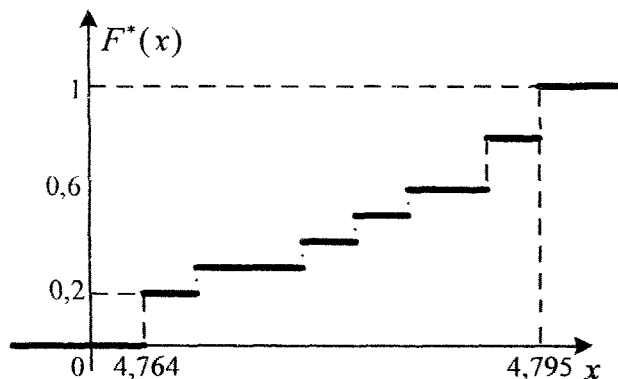
Результаты группированного статистического ряда можно использовать для построения гистограммы. Она строится следующим образом. По оси ОХ откладывают длины разрядов и над каждым разрядом строят прямоугольник, площадь которого равна частоте разряда. Так что суммарная площадь прямоугольников равна единице. Полученную диаграмму и называют *гистограммой*.

**Пример.** При измерении заряда электрона Милликеном было получено 58 измерений (в  $10^{-10}$  абс. эл. стат. единицах) 4,781; 4,795; 4,764; 4,769; 4,792; 4,792; 4,779; 4,764; 4,795; 4,775,... (ради упрощения мы привели только десять из этих измерений). Построить: 1) статистический ряд распределения; 2) статистическую функцию

распределения; 3) группированный статистический ряд; 4) гистограмму; 5) найти средний заряд электрона и среднее значение квадрата ошибки измерений.

**Решение.** 1). Все 58 измерений есть выборка, приведенные 10 измерений – также выборка. Статистический ряд построим для десяти измерений.

$x_i$	4,764	4,769	4,775	4,779	4,781	4,792	4,795
$P_i^*$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$



2) Статистическую функцию построим также для десяти измерений (см. рис.).

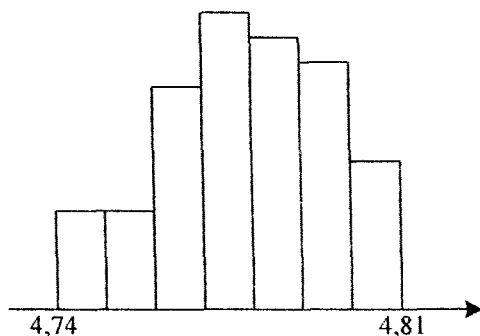
3) В случае 58 измерений размах выборки  $R=4,810-4,740=0,07$ . Разобьем весь этот диапазон значений на 7 равных разрядов, подсчитаем частоту каждого разряда и получим следующий группированный статистический ряд:

Разряды	4,74- 4,75	4,75- 4,76	4,76- 4,77	4,77- 4,78	4,78- 4,79	4,79- 4,80	4,80- 4,81
---------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------



Часто та	$\frac{2}{58}$	$\frac{2}{58}$	$\frac{9}{58}$	$\frac{15}{58}$	$\frac{14}{58}$	$\frac{10}{58}$	$\frac{6}{58}$
-------------	----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------	----------------

4) Ширина каждого из семи прямоугольников в гистограмме равна 0,01, а высоты равны соответствующей частоте, умноженной на 100.



5) Для оценки заряда электрона воспользуемся формулой (1).

При  $n=10$  получим  $\bar{x}=4,7807$ , а при  $n=58$   $\bar{x}=4,7808$ .

Для оценки квадрата ошибки измер

## §12. Примеры некоторых распределений

1. **Биномиальное распределение.** Дискретная случайная величина  $\xi$  с конечным числом возможных значений  $x_k=k=0,1,2,\dots,n$  называется распределенной по биномиальному закону, если соответствующие вероятности даются формулой Бернулли

$$P_{k,n} = P(\xi = k) = p_k = C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (1)$$

По биномиальному закону распределено, например, число успехов в  $n$  испытаниях Бернулли (см §7.). Воспользуемся биномом Ньютона

$$(p+q)^n = 1 = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (2)$$

Из (2) видно, что формула (1)- это  $k$ -й член разложения бинома Ньютона. Отсюда и название распределения. Из

этой же формулы (2) видно, что  $\sum_{k=0}^n p_k = 1$ .

Найдем математическое ожидание.

$$m_\xi = \sum_{k=0}^n x_k p_k = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = p \left( \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \right)'_p =$$

$$p \left( (p+q)^n \right)'_p = pn(p+q)^{n-1} = pn.$$

(Индекс внизу означает, что производная берется по  $p$ .)

Итак,  $m_\xi = pn$ . (3)

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D_\xi = \alpha_2[\xi] - m_\xi^2. \quad (4)$$

Продифференцируем (2) по  $p$  два раза и умножим полученное равенство на  $p^2$ . В результате получим

$$p^2 \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k p^{k-2} q^{n-k} = p^2 n(n-1)(p+q)^{n-2},$$

$$\text{или } p^2 \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = p^2 n(n-1),$$

$$\text{или } \alpha_2[\xi] - m_\xi = p^2 n(n-1). \quad (5)$$

Подставляя  $\alpha_2[\xi]$  из (5) в (4), найдем с учетом (3)

$$D_\xi = npq. \quad (6)$$

Можно доказать, что мода  $M_0$  случайной величины  $\xi$ , распределенной по биномиальному закону, удовлетворяет условию

$$np + p - 1 \leq M_0 \leq np + p. \quad (7)$$

В частности, если  $np$  число натуральное, то оно и является модой. Коэффициент асимметрии определяется формулой

$$a_{\xi} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}. \quad (8)$$

2. **Геометрическое распределение.** Дискретная случайная величина  $\xi$ , возможными значениями которой является бесконечная последовательность натуральных чисел  $1, 2, 3, \dots$ , а соответствующие вероятности даются формулой

$$P(\xi = k) = p_k = pq^{k-1}, \quad (9)$$

называется распределенной по геометрическому закону. Если число испытаний Бернулли не ограничивать, а проводить их до первого успеха, то число всех испытаний (вплоть до первого успеха) есть случайная величина  $\xi$ , распределенная по геометрическому закону. Название закона обязано тому, что вероятности (9) образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $q$ .

Проверим условие  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ . Действительно,

$$p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \frac{1}{1-q} = 1. \quad (10)$$

Найдем математическое ожидание

$$m_{\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \left( \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p \left( \frac{q}{q-1} \right)' = \frac{1}{p}.$$

Итак,  $m_{\xi} = \frac{1}{p}$ . (11)

Для нахождения дисперсии вычислим сначала  $\alpha_2[\xi]$ . Из

(10) получим  $p \sum_{k=1}^{\infty} q^k = p \frac{q}{1-q}$ . Продифференцировав

последнее тождество два раза по  $q$  и умножив обе части полученного равенства на  $q$ , найдем

$$p \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = \frac{2pq}{(1-q)^3}, \text{ или}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p q^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} = \frac{2q}{p^2}, \text{ или}$$

$$\alpha_2[\xi] - m_\xi = \frac{2q}{p^2}. \quad (12)$$

Подставляя  $\alpha_2[\xi]$  из (12) в (4) и учитывая (11), получим

$$D_\xi = \frac{1-p}{p^2}. \quad (13)$$

**Пример 1.** Сколько в среднем расходуется патронов, чтобы поразить цель, если вероятность попадания  $p=0,2$ , а цель поражается при первом же попадании?

**Решение.** Воспользуемся (11), получим  $m_\xi=5$ .

3. **Распределение Пуассона.** Дискретная случайная величина  $\xi$ , возможными значениями которой являются члены последовательности  $0, 1, 2, \dots$ , а соответствующие вероятности даются формулой

$$P(\xi = k) = p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad (14)$$

называется распределенной по закону Пуассона,  $a$  – параметр.

В §7 доказано, что закон Пуассона является предельным для биномиального, его называют законом редких явлений. По закону Пуассона может быть распределено, например, число телефонных звонков, поступивших на телефонную станцию за некоторый промежуток времени.

Убедимся, что  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ . Действительно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} e^a = 1.$$

Найдем математическое ожидание

$$m_\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a} = a e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = a e^{-a} e^a = a.$$

Итак,  $m_{\xi} = a$ . (15)

Чтобы найти дисперсию, вычислим предварительно второй начальный момент  $\alpha_2[\xi]$ .

$$\begin{aligned} \alpha_2[\xi] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} e^{-a} = a e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= a e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1)+1) \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = a^2 e^{-a} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^{k-2}}{(k-2)!} + \\ & a e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = a^2 + a. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (16) и (15) в (4), найдем

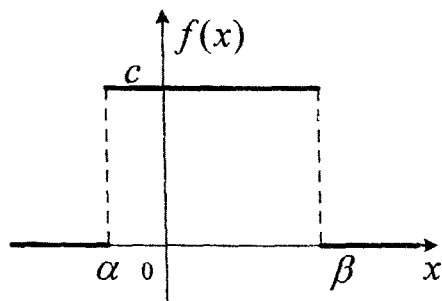
$$D_{\xi} = a. \quad (17)$$

Таким образом, при распределении Пуассона  $m_{\xi} = D_{\xi} = a$ .

**Пример 2.** Среднее число отказов аппаратуры за год равно 3. Определить вероятность отказа аппаратуры в течение месяца.

**Решение.** Очевидно,  $m_{\xi} = a = \frac{3}{12} = 0,25$ . Пусть событие  $A$  означает нуль отказов за месяц. Тогда согласно (14)  $P(A) = p_0 = e^{-0,25}$ . Событие  $\bar{A}$  означает отказ аппаратуры (хотя бы один отказ).  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - e^{-0,25} \approx 0,22$ .

4. **Равномерное распределение.** Если все возможные



значения непрерывной случайной величины  $\xi$  лежат в конечном интервале  $(\alpha, \beta)$ , а плотность вероятности постоянная на этом интервале, то говорят, что случайная

величина  $\xi$  распределена равномерно (см. §9). Плотность распределения можно записать так

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in (\alpha, \beta) \\ 0, & x \notin (\alpha, \beta) \end{cases}$$

Постоянную  $c$  найдем, используя свойство плотности распределения  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ . В нашем случае  $c = (\beta - \alpha)^{-1}$ .

Найдем математическое ожидание

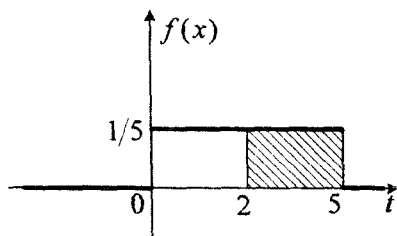
$$m_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} c x dx = \frac{1}{2}(\alpha + \beta). \quad (18)$$

Аналогично найдем дисперсию

$$D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x - m_{\xi})^2 c dx = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2. \quad (19)$$

Из (18) видно, что кривая распределения симметрична относительно центра распределения, поэтому все центральные моменты нечетного порядка обращаются в нуль. Медиана совпадает с  $m_{\xi}$ .

**Пример 3.** Автобусы ходят с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что случайно подошедший к остановке пассажир будет ожидать автобус не более 3-х минут.

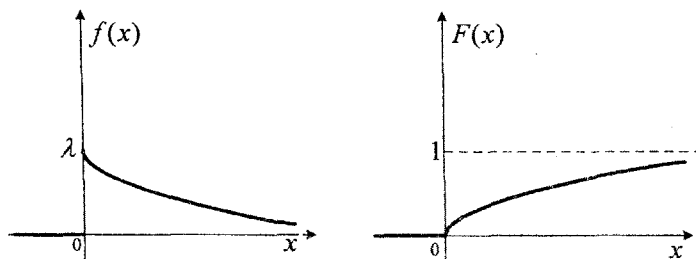


**Решение.**  $P(2 \leq \xi \leq 5) = \int_2^5 \frac{1}{5} dx = 0,6$ .

5. **Показательный закон.** Непрерывная случайная величина распределена по показательному закону, если ее плотность имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$\lambda > 0$  – параметр. Найдем функцию распределения



$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание  $m_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$ .

Интегрируя по частям, получим

$$m_{\xi} = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx = \left( -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \quad (20)$$

Найдем дисперсию

$$D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 f(x) dx.$$

После двукратного интегрирования по частям получим

$$D_{\xi} = \lambda \int_0^{\infty} \left( x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (21)$$

Коэффициент асимметрии  $a_\xi$  и медиана  $M_D$  определяются формулами  $a_\xi=2$ ,  $M_D = \frac{\ln 2}{\lambda}$ . (22)

**Упражнение.** Проверить условие  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$  и формулы (22).

Время безотказной работы многих электронных приборов подчиняется показательному закону.

**Пример 4.** Определить вероятность того, что аппаратура безотказно проработает не менее 3-х лет, если ее среднее время безотказной работы 2 года.

**Решение.** По условию задачи  $m_\xi = 2 = \frac{1}{\lambda}$ ,  $\lambda = 0,5$ .

$$P(3 \leq \xi < +\infty) = \lambda \int_3^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -e^{-0,5x} \Big|_3^{\infty} = e^{-1,5} \approx 0,223.$$

**6. Гамма-распределение.** Этот закон распределения является обобщением показательного. Плотность гамма - распределения определяется формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \quad (23)$$

Параметры  $\alpha$  и  $\lambda$  могут быть любыми положительными числами,  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  - гамма - функция (см. §1 гл.4).

При  $\alpha=1$  гамма-распределение совпадает с показательным распределением.

Используя свойства гамма - функции, найдем математическое ожидание и дисперсию.

$$m_\xi = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} dx = \left| \begin{array}{l} \lambda x = t \\ \lambda dx = dt \end{array} \right| = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha-1} t^\alpha e^{-t} dt =$$



$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}. \text{ Итак,}$$

$$m_{\xi} = \frac{\alpha}{\lambda}. \quad (24)$$

$$\alpha_2[\xi] = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}, \quad (25)$$

$$D_{\xi} = \alpha_2[\xi] - m_{\xi}^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \quad (26)$$

Мода  $M_0$  и коэффициент асимметрии  $\alpha_{\xi}$  определяются формулами

$$M_0 = \frac{\alpha-1}{\lambda}, \alpha > 1; \quad \alpha_{\xi} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}. \quad (27)$$

Распределение хи-квадрат с  $n$  степенями свободы является частным случаем гамма – распределения. Плотность этого распределения определяется формулой (23) при  $\lambda=0,5$ ,  $\alpha=0,5n$ . Числовые характеристики также получаются по соответствующим формулам (24-27) при  $\lambda=0,5$ ,  $\alpha=0,5n$ .

По закону хи-квадрат с  $n$  степенями свободы распределена, например, сумма  $n$  квадратов случайных величин  $\xi_i$ , подчиненных некоторым дополнительным условиям.

**7. Нормальное распределение.** Если плотность распределения непрерывной случайной величины  $\xi$  определяется формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (28)$$

то говорят, что случайная величина распределена по нормальному закону (по закону Гаусса) с параметрами  $a$  и  $\sigma$ . Обозначают  $N(a, \sigma)$ . Если  $a=0$ ,  $\sigma=1$ , то закон называется стандартным нормальным и обозначается  $N(0,1)$ .

Нормальный закон распределения играет исключительную роль в теории вероятностей. Исключительное положение этого закона объясняется тем, что он является предельным законом, к которому стремятся многие другие законы распределения. Это утверждение носит название центральной предельной теоремы, с которой мы познакомимся позже.

Кривая распределения (28) симметрична относительно точки  $x=a$ . При изменении параметра  $a$  кривая смещается вдоль оси  $Ox$ , не меняя своего вида. В точке  $x=a$  кривая достигает своего максимума  $f_{\max} = f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ . При

уменьшении  $\sigma$  величина  $f_{\max}$  увеличивается, а т.к. площадь, ограниченная кривой распределения, остается равной единице, то кривая сжимается с уменьшением  $\sigma$ . Точки  $x=a \pm \sigma$  являются ее точками перегиба, ось  $Ox$  — асимптотой. Найдем математическое ожидание.

$$m_{\xi} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left. \begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = t \\ dx = \sigma dt \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + a) e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = a.$$

Воспользовались интегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi},$$

а первое слагаемое обращается в нуль, т.к. подынтегральная функция нечетная. Итак,

$$m_{\xi} = a \quad (29)$$

Очевидно, математическое ожидание, мода и медиана совпадают. Найдем центральные моменты  $\mu_k[\xi]$ .

$$\mu_0[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left. \begin{array}{l} \frac{x-a}{\sigma} = t \\ dx = \sigma dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1. \text{ Тем самым мы проверили основное}$$

свойство плотности распределения. Первый центральный момент  $\mu_1[\xi] = 0$  для любого распределения, поэтому найдем  $\mu_k[\xi]$  при  $k \geq 2$ .

$$\mu_k[\xi] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^k e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$\left. \begin{array}{l} u = t^{k-1}, du = (k-1)t^{k-2} dt, \\ dv = e^{-\frac{1}{2}t^2} d\left(\frac{1}{2}t^2\right), v = -e^{-\frac{1}{2}t^2} \end{array} \right| = \sigma^2(k-1) \frac{\sigma^{k-2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \sigma^2(k-1)\mu_{k-2}[\xi]. \text{ Итак,}$$

$$\mu_k = \sigma^2(k-1)\mu_{k-2}, \quad k \geq 2 \quad (30)$$

Из (30) найдем  $\mu_2 = D_\xi = \sigma^2$  т.е. параметр  $\sigma = \sqrt{D_\xi}$  есть среднее квадратичное отклонение. Из равенства  $\mu_1 = 0$  и (30) следует, что все центральные моменты нечетного порядка обращаются в нуль. Легко проверить, что эксцесс

$$e_\xi = \frac{\mu_4}{\sigma_\xi^4} - 3 \text{ для нормального распределения равен нулю.}$$

Все другие кривые распределения сравнивают с кривой нормального распределения. Если  $e_\xi < 0$ , то кривая распределения более плосковершинная по сравнению с гауссовой кривой, при  $e_\xi > 0$  - более островершинная.

Неэлементарная функция  $\Phi(x)$ , определенная несобственным интегралом  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ , (31)

называется *интегралом вероятности*. Выразим функцию распределения  $F(x)$  через интеграл вероятности.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left[ \frac{t-a}{\sigma} = u \right] = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}u^2} du + \int_0^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Итак,  $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ . (32)

Из (32) получим

$$P(\alpha \leq \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (33)$$

**Пример 5.** Найти вероятность события  $|\xi - a| > 3\sigma$ , если случайная величина  $\xi$  распределена нормально.

**Решение.**  $P(|\xi - a| > 3\sigma) = 1 - P(|\xi - a| \leq 3\sigma) = 1 - P(a - 3\sigma \leq \xi \leq a + 3\sigma) = 1 - \Phi(3) + \Phi(-3) = 1 - 2\Phi(3) = 1 - 2 \cdot 0,49865 = 0,0027$ . Значение  $\Phi(3)$  взято из таблиц.

Таким образом, для нормально распределенной величины все ее практически возможные значения ограничены интервалом  $(m_\xi - 3\sigma_\xi, m_\xi + 3\sigma_\xi)$ , а событие  $|\xi - m_\xi| > 3\sigma_\xi$  оказывается практически невозможным. Этот факт носит название “правила трех сигма”.

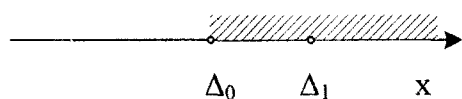
### §13. Понятие о критериях согласия

Обработывая независимые измерения случайной величины  $\xi$ , мы можем построить статистическую функцию распределения  $F^*(x)$ . По виду этой функции можно принять гипотезу, что истинная теоретическая функция распределения есть  $F(x)$ . Сами независимые измерения  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , образующие выборку, можно рассматривать как одинаково распределенные случайные величины с гипотетической функцией распределения  $F(x)$ . Очевидно, между функциями  $F^*(x)$  и  $F(x)$  будут некоторые расхождения. Возникает вопрос – являются ли эти расхождения следствием ограниченности объема выборки или связаны с тем, что наша гипотеза не верна, т.е. действительная функция распределения не  $F(x)$ , а какая-то другая. Для решения этого вопроса пользуются критериями согласия, суть которых в следующем. Выбирается некоторая величина  $\Delta(F, F^*)$ , которая характеризует степень расхождения между функциями  $F^*(x)$  и  $F(x)$ . Например,  $\Delta(F, F^*) = \text{Sup}|F(x) - F^*(x)|$ , т.е. верхняя грань по  $x$  модуля разности.

Считая гипотезу верной, т.е. зная функцию распределения  $F(x)$ , можно найти закон распределения случайной величины  $\Delta(F, F^*)$  (вопроса, как это сделать, мы касаться не будем). Зададим число  $p_0$  столь малое, что осуществление события  $\{\Delta(F, F^*) > \Delta_0\}$  с этой вероятностью будем считать практически невозможным. Из условия

$$P(\Delta(F, F^*) > \Delta_0) = \int_{\Delta_0}^{\infty} f(x) dx = p_0$$

найдем величину  $\Delta_0$ . Здесь  $f(x)$  – плотность распределения



$\Delta(F, F^*)$ . Вычислим теперь величину  $\Delta(F, F^*) = \Delta_1$  по результатам

выборки, т.е. найдем одно из возможных значений случайной величины  $\Delta(F, F^*)$ . Если  $\Delta_1 \geq \Delta_0$ , то это означает, что произошло практически невозможное событие. Объяснить это можно тем, что наша гипотеза не верна. Итак, если  $\Delta_1 \geq \Delta_0$ , то гипотеза отвергается, а при  $\Delta_1 < \Delta_0$ , гипотеза может оказаться неверной, но вероятность этого мала.

В качестве меры расхождения  $\Delta(F, F^*)$  можно брать различные величины. В зависимости от этого получаются различные критерии согласия. Например, критерий согласия Колмогорова, Мизеса, Пирсона, или критерий хи-квадрат.

Пусть результаты  $n$  измерений оформлены в виде группированного статистического ряда с  $k$  разрядами.

РАЗРЯД	$(x_0, x_1)$	$[x_1, x_2)$	...	$[x_{k-1}, x_k)$
ЧАСТОТА	$p_1^*$	$p_2^*$	...	$p_k^*$

Зная функцию распределения  $F(x)$ , найдем вероятность  $p_i$  того, что случайная величина  $\xi$  попала в  $i$ -тый разряд. За меру расхождения  $\Delta(F, F^*)$  возьмем величину

$$\Delta(F, F^*) = \chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \quad (1)$$

Здесь  $m_i = np_i^*$  - число измерений в  $i$ -том разряде. Пирсоном доказано, что закон распределения случайной величины (1) стремится к закону распределения хи-квадрат с  $(k-1)$  степенью свободы при неограниченном увеличении объема выборки. Поэтому при больших  $n$  можно использовать этот закон (см. §12 пр.6). Получаются хорошие результаты, если  $np_i \geq 10$ .

**Замечание.** Если в гипотетической функции распределения неизвестные параметры заменяются их оценками, полученными из выборки определенными методами, то

число степеней свободы в распределении хи-квадрат уменьшается на число оцененных параметров.

**Пример.** В §11 мы построили группированный статистический ряд для измеренной величины заряда электрона. Выскажем гипотезу, что измеренные величины распределены равномерно на отрезке  $[\alpha, \beta]$  (фактически мы предполагаем, что ошибки измерения распределены равномерно на некотором отрезке). Тогда вероятность попадания в каждый из семи разрядов будет равна  $p_i = \frac{1}{7}$ .

Используя группированный ряд из §11, вычислим  $\Delta(F, F^*) = \Delta_1 = \chi^2$  по формуле (1). В данном случае  $k = 7, p_i = \frac{1}{7}, n = 58$ .

$$\Delta_1 = 58 \cdot 7 \cdot \left( 2 \cdot \left( \frac{2}{58} - \frac{1}{7} \right)^2 + \left( \frac{9}{58} - \frac{1}{7} \right)^2 + \left( \frac{15}{58} - \frac{1}{7} \right)^2 + \left( \frac{14}{58} - \frac{1}{7} \right)^2 + \left( \frac{10}{58} - \frac{1}{7} \right)^2 + \left( \frac{6}{58} - \frac{1}{7} \right)^2 \right) = 20.$$

Поскольку в гипотетический закон распределения входят два неизвестных параметра,  $\alpha$  и  $\beta$  – начало и конец отрезка, то число степеней свободы будет  $7-1-2=4$ . По таблице распределения хи-квадрат при выбранной вероятности  $p_0=10^{-3}$  найдем  $\Delta_0=18$ . Т.к.  $\Delta_1 > \Delta_0$ , то гипотезу о равномерном распределении ошибки измерения придется отбросить.

ений воспользуемся формулой (3) при  $k=2$ , только  $n$  заменим в ней на  $(n-1)$ . Причина этого будет ясна позже. При  $n=10$  получим  $D_\xi^* = 155 \cdot 10^{-6}$ , а при  $n=58$   $D_\xi^* = 234 \cdot 10^{-6}$ .

## §14. Многомерная случайная величина. Функция и плотность распределения

Рассмотрим случайную величину – точку разрыва снаряда на плоскости. Поскольку точка на плоскости характеризуется двумя координатами, то мы имеем дело уже не с одной, а с системой двух случайных величин ( $\xi$ ,  $\eta$ ). Аналогично, точка разрыва дистанционного снаряда в воздухе – система трех случайных величин ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ). Это примеры многомерных случайных величин. Геометрически такие величины интерпретируются как случайные точки в  $n$ -мерном пространстве или как случайный вектор  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  этого пространства. Уточним понятие многомерной случайной величины. Пусть  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  – вероятностное пространство и пусть на  $\Omega$  задано  $n$  случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Совокупность (система) этих величин  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  и называется многомерной случайной величиной, или  $n$ -мерным случайным вектором, или случайной точкой  $n$ -мерного пространства. Сами величины  $\xi_i$  называются компонентами (координатами) вектора  $\xi$ .

**Определение 1.** Функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется функцией распределения  $n$ -мерной случайной величины  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , если она определена равенством

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n). \quad (1)$$

Заметим, что событие

$$\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} = \bigcap_{k=1}^n \{\xi_k < x_k\} \subset \mathfrak{F},$$

а поэтому вероятность в правой части (1) существует, и функция распределения определена в любой точке пространства  $R_n$ .

Если все компоненты случайного вектора являются дискретными, то и сам вектор называется дискретным.

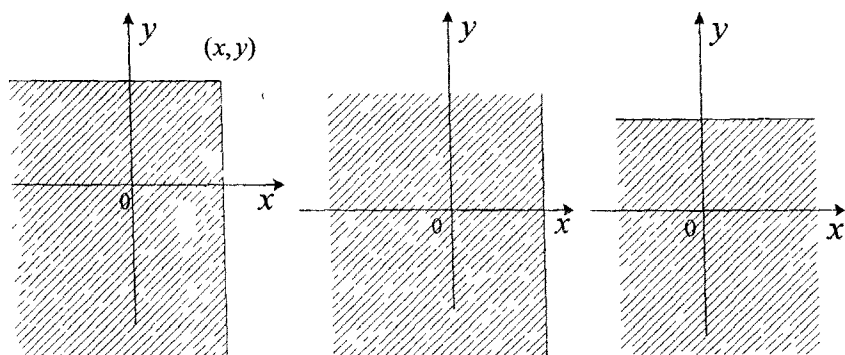


**Определение 2.** Если существует неотрицательная функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  такая, что при любых  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выполняется равенство

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n, \quad (2)$$

то случайный вектор  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  называется непрерывным. Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется плотностью распределения случайного вектора  $\xi$ .

Функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет смысл как для дискретного, так и для непрерывного случайного вектора. Плотность распределения  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет смысл только для непрерывной случайной величины, если иметь в виду обычные функции. Используя  $\delta$ -функцию, можно и для дискретной случайной величины ввести понятие плотности. Остановимся подробнее на двумерной случайной величине  $(\xi, \eta)$  с функцией распределения  $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$ . Геометрически функция распределения  $F(x, y)$  означает вероятность попадания случайной точки в бесконечный квадрант с вершиной в точке  $(x, y)$ , лежащий левее и ниже ее (см. заштрихованную часть на рисунке). Функция распределения  $F_1(x)$  компоненты  $\xi$  вектора  $(\xi, \eta)$



означает вероятность попасть в левую полуплоскость, ограниченную справа линией, параллельной оси  $Oy$  и

проходящей через точку  $x$ . Функция распределения  $F_2(y)$  компоненты  $\eta$  вектора  $(\xi, \eta)$  означает вероятность попасть в нижнюю полуплоскость (см. рис.).

Из геометрической интерпретации легко понять свойства функции распределения  $F(x, y)$ .

- 1)  $F(x, y)$  неубывающая функция;
- 2)  $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, \infty) = 0$ ;
- 3)  $F(x, +\infty) = F_1(x)$ ,  $F(+\infty, y) = F_2(y)$ ;
- 4)  $F(+\infty, +\infty) = 1$ .

Перепишем (2) для двумерной случайной величины

$$P(\xi < x; \eta < y) = F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv . \quad (2')$$

Из (2') получим

$$F(x; +\infty) = F_1(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv ,$$

$$F(+\infty; y) = F_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv . \quad (3)$$

Дифференцируя (3) по переменным верхним пределам, найдем, что в точках непрерывности функции  $f(x, y)$

$$\frac{dF_1}{dx} = f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv ,$$

$$\frac{dF_2}{dy} = f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, y) du . \quad (4)$$

Таким образом, зная закон распределения двумерной случайной величины, мы всегда найдем закон распределения составляющих величин  $\xi$  и  $\eta$ . Аналогично, дифференцируя (2') по  $x$  и по  $y$ , получим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y) . \quad (5)$$

Из (2') ясно, что величину  $f(x,y)dx dy=f(x,y)ds$  можно интерпретировать как элементарную вероятность, т.е. вероятность попадания случайной точки  $(\xi,\eta)$  в элементарную площадку  $ds$ :  $P((\xi,\eta)\in ds)=f(x,y)ds$ . Поэтому вероятность попадания случайной точки в некоторую конечную область  $D$  можно определить так:

$$P((\xi,\eta)\in D) = \iint_D f(x,y)dx dy . \quad (6)$$

Заметим, что все полученные формулы можно обобщить на  $n$ -мерную случайную величину. В частности

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} . \quad (5')$$

Если дискретная случайная величина имеет конечное число возможных значений, то ее удобнее задавать в виде таблицы, где указаны все ее возможные значения и соответствующие вероятности. Для примера приведем такую таблицу для двумерной случайной величины  $(\xi,\eta)$

$\eta$	$\xi$				$\sum_{j=1}^n p_{ij}$
	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	
$y_1$	$p_{11}$	$p_{21}$	...	$p_{n1}$	$p(y_1)$
$y_2$	$p_{12}$	$p_{22}$	...	$p_{n2}$	$p(y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$y_m$	$p_{1m}$	$p_{2m}$	...	$p_{nm}$	$p(y_m)$
$\sum_{j=1}^m p_{ij}$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$	

Здесь случайная величина  $\xi$  принимает  $n$  возможных значений, а случайная величина  $\eta$  —  $m$  возможных значений.  $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j), \sum_{i,j} p_{ij} = 1$ .

Первая и последняя строка таблицы дают ряд распределения случайной величины  $\xi$ , а первый и последний столбцы таблицы дают ряд распределения случайной величины  $\eta$ . При этом

$$p(x_i) = P(\xi = x_i) = \sum_{j=1}^m p_{ij},$$

$$p(y_i) = P(\eta = y_i) = \sum_{i=1}^n p_{ij}. \quad (7)$$

**Пример 1.** Дискретная случайная величина  $(\xi, \eta)$  задана таблицей. Найти ряд распределения для компонент  $\xi$  и  $\eta$ .

$\eta$	$\xi$				$P(\eta=y_i)$
	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=4$	$x_4=8$	
$y_1=3$	0,15	0,06	0,25	0,04	0,5
$y_2=6$	0,30	0,10	0,03	0,07	0,5
$P(\xi=x_i)$	0,45	0,16	0,28	0,11	

**Решение.** Суммируя, согласно (7),  $p_{ij}$ , стоящие в столбцах, получим ряд распределения случайной величины  $\xi$  (см. последнюю строку таблицы). Суммируя  $p_{ij}$ , стоящие в строках, получим ряд распределения случайной величины  $\eta$  (см. последний столбец таблицы).

**Пример 2.** Непрерывная случайная величина  $(\xi, \eta)$  задается плотностью распределения

$$f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \exp(-4(x-2)^2 - 6xy - 9y^2).$$

Найти плотности компонент  $\xi$  и  $\eta$   $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ .

**Решение.** Воспользуемся формулами (4).

$$f_1(x) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-9\left(y - \frac{1}{3}x\right)^2 - 4(x-2)^2 + x^2\right) dy = \left| \begin{array}{l} 3\left(y - \frac{1}{3}x\right) = t \\ 3dy = dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi} e^{-4(x-2)^2 + x^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} e^{-4(x-2)^2 + x^2}.$$

$$f_2(y) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-4\left(x - 2 + \frac{3}{4}y\right)^2 - \frac{27}{4}y^2 - 12y\right) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 2\left(x - 2 + \frac{3}{4}y\right) = t \\ 2dx = dt \end{array} \right| = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{27}{4}y^2 - 12y}.$$

## §15. Независимость случайных величин.

### Условные распределения

В §5 были введены понятия независимых и зависимых случайных событий. Аналогичные понятия вводятся и для случайных величин.

Пусть случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  заданы на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если имеет

$$\text{место равенство } P\left(\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i < x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i < x_i) \quad (1)$$

для произвольных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если равенство (1) переписать в виде:

$$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i < x_i),$$

то легко перейти к терминам функции распределения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i). \quad (1')$$

Здесь  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - функция распределения случайного вектора  $\xi=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , а  $F_i(x_i)$  - функция распределения  $i$ -ой компоненты вектора  $\xi$ .

**Теорема.** Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - плотность распределения случайного вектора  $\xi=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы тогда и только тогда, когда во всех точках непрерывности функций  $f(x_1, x_2, \dots, x_n), f_i(x_i), i=1, 2, \dots, n$  имеет место равенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (2)$$

(без доказательства).

Здесь  $f_i(x_i)$  - плотность распределения  $i$ -ой компоненты вектора  $\xi$ .

Естественно, если условие (1') или (2) не выполняется, то случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  зависимые. Однако, речь идет не о функциональной, а о так называемой вероятностной зависимости. Например, количество выпавших осадков и урожай - величины случайные. Интуитивно ясно, что они зависимые, но эта зависимость не функциональная. В предельном случае вероятностная зависимость может перейти в функциональную.

Если случайные величины зависимые, то функция распределения (плотность), например, первой компоненты вектора будет зависеть от того, какие значения приняли остальные компоненты вектора. Такую функцию распределения (плотность) называют условной и говорят об условном законе распределения.

Рассмотрим двумерный случайный вектор  $(\xi, \eta)$ . Тогда  $F_1(x/y)$  - условная функция распределения компоненты  $\xi$  при условии, что вторая компонента  $\eta$  приняла значение  $y$ . Аналогично определяются  $F_2(y/x)$ ,  $f_1(x/y)$ ,  $f_2(y/x)$ . Условные функция и плотность распределения обладают всеми свойствами безусловных функций и плотности распределения.

Можно доказать, что если  $\xi$  и  $\eta$  зависимые, то вместо (1') и (2) справедливы следующие формулы:

$$F(x,y)=F_1(x)F_2(y/x)=F_2(y)F_1(x/y), \quad (3)$$

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y/x)=f_2(y)f_1(x/y). \quad (4)$$

Равенства (3) и (4) называют теоремой умножения законов распределения. Из формул (1')-(4) следует, что условие независимости случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} F_1(x/y) &= F_1(x), & F_2(y/x) &= F_2(y), \\ f_1(x/y) &= f_1(x), & f_2(y/x) &= f_2(y). \end{aligned} \quad (5)$$

Для дискретной случайной величины  $(\xi, \eta)$  условные вероятности даются формулами:

$$P(\xi = x_i / y_j) = \frac{P_{ij}}{P(\eta = y_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$P(\eta = y_j / x_i) = \frac{P_{ij}}{P(\xi = x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

**Пример 1.** Найти закон распределения компоненты  $\xi$  случайного вектора  $(\xi, \eta)$ , если а)  $\eta = y_1 = 3$ , б)  $\eta = y_2 = 6$  (см. пр.1 §14)

**Решение:** т.к.  $P(\eta = 3) = 0,5$  и  $P(\eta = 6) = 0,5$ , то согласно (6) получим:

а)  $P(\xi = x_i / 3) = p_{i1} / 0,5$ ; б)  $P(\xi = x_i / 6) = p_{i2} / 0,5$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .  
Условными законами распределения являются таблицы:

а)

$x_i$	1	3	4	8
$p_i$	0,30	0,12	0,50	0,08

б)	$x_i$	1	3	4	8
	$p_i$	0,6	0,2	0,06	0,14

**Пример 2.** Случайный вектор  $(\xi, \eta)$  задан своей плотностью

$$f(x, y) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \exp(-4(x-2)^2 - 6xy - 9y^2). \quad \text{Найти условную}$$

плотность компонент  $\xi$  и  $\eta$ . Зависимы ли  $\xi$  и  $\eta$  ?

**Решение:** Плотности распределения  $\xi$  и  $\eta$  -  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$  найдены в пр.2 §14. Из (4) найдем:

$$f_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4\left(x-2+\frac{3}{4}y\right)^2},$$

$$f_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+3y)^2}.$$

Поскольку  $f_1(x/y) \neq f_1(x)$ , то  $\xi$  и  $\eta$  зависимые.

#### §16. Числовые характеристики многомерной случайной величины

Основными числовыми характеристиками двумерной случайной величины  $(\xi, \eta)$  являются начальные и центральные моменты.

**Определение 1.** Начальным моментом  $\alpha_{ks}$  порядка  $(k+s)$  случайной величины  $(\xi, \eta)$  называют число, определяемое формулой

$$\alpha_{ks} = \int \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy. \quad (1)$$

Здесь  $f(x, y)$  - плотность распределения случайного вектора  $(\xi, \eta)$ .

Очевидно,  $\alpha_{00}=1$ . Наиболее употребительными являются начальные моменты  $\alpha_{10}$  и  $\alpha_{01}$ .

$$\alpha_{10} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy =$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = m_{\xi}$$

Аналогично найдем, что  $\alpha_{01} = m_{\eta}$ . Точку  $(m_{\xi}, m_{\eta})$  называют центром распределения величины  $(\xi, \eta)$ .

**Определение 2.** Центральным моментом  $\mu_{ks}$  порядка  $(k+s)$  случайной величины  $(\xi, \eta)$  называют число, определяемое формулой:

$$\mu_{ks} = \int \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^k (y - m_{\eta})^s f(x, y) dx dy. \quad (2)$$

Поскольку  $\mu_{01} = \mu_{10} = 0$ , то наиболее употребительными являются центральные моменты второго порядка  $\mu_{20}$ ,  $\mu_{02}$ ,  $\mu_{11}$ .

$$\mu_{20} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 f_1(x) dx = D_{\xi}.$$

Аналогично найдем, что  $\mu_{02} = D_{\eta}$ .  $D_{\xi}$  и  $D_{\eta}$  – дисперсии компонент  $\xi$  и  $\eta$ . Они характеризуют рассеяние случайного вектора  $(\xi, \eta)$  в направлениях осей координат  $x$  и  $y$ .

Особую роль играет второй смешанный момент  $\mu_{11}$

$$\mu_{11} = \int \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})(y - m_{\eta}) f(x, y) dx dy = K_{\xi\eta}. \quad (3)$$

Его называют корреляционным моментом. Формулу (3) можно преобразовать к виду:

$$K_{\xi\eta} = \alpha_{11} - m_{\xi} m_{\eta}. \quad (3')$$

Если случайная величина  $(\xi, \eta)$  дискретная с конечным числом возможных значений, то формулы (1), (2), (3') удобнее писать в виде:

$$\alpha_{KS} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^K y_j^S p_{ij}. \quad (1')$$

$$\mu_{KS} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - m_{\xi})^K (y_j - m_{\eta})^S p_{ij}, \quad (2')$$

$$K_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij} - m_{\xi} m_{\eta} \quad (3')$$

**Теорема.** Если  $\xi$  и  $\eta$  независимые, то корреляционный момент равен нулю,  $K_{\xi\eta} = \mu_{11} = 0$ .

**Доказательство.** Если  $\xi$  и  $\eta$  независимые, то  $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ . Тогда

$$\mu_{11} = K_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi}) f_1(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_{\eta}) f_2(y) dy = 0.$$

Теорема доказана.

**Определение 3.** Если корреляционный момент  $K_{\xi\eta}$  равен нулю, то  $\xi$  и  $\eta$  называются некоррелированными. Если  $K_{\xi\eta} \neq 0$  - то они называются коррелированными.

**Следствие.** Коррелированные величины являются зависимыми.

**Доказательство.** От противного. Пусть они независимые. Тогда согласно теореме  $K_{\xi\eta} = 0$ , что противоречит условию. Следствие доказано.

**Замечание.** Обратное утверждение неверно, т.е. зависимые случайные величины могут быть некоррелированными, а некоррелированные - зависимыми.

Из теоремы и следствия ясно, что корреляционный момент  $K_{\xi\eta}$  характеризует не только рассеяние случайного вектора  $(\xi, \eta)$ , но и в какой-то степени зависимость между величинами  $\xi$  и  $\eta$ . Для оценки степени этой зависимости вводят понятие коэффициента корреляции:

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi} \sigma_{\eta}}. \quad (4)$$

Можно доказать, что  $|r_{\xi\eta}| \leq 1$ . При этом, если  $r_{\xi\eta} = 0$ , то величина  $\xi$  и  $\eta$  некоррелированные, если  $|r_{\xi\eta}| = 1$ , то они связаны линейной функциональной зависимостью. Таким образом, чем ближе модуль коэффициента корреляции к

единице, тем теснее линейная связь между компонентами  $\xi$  и  $\eta$ .

Аналогично определяются числовые характеристики  $n$ -мерного случайного вектора  $\xi=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . В частности:

$$m_i = M[\xi_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (5)$$

$$D_i = D[\xi_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (6)$$

$$K_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (7)$$

Из (7) видно, что  $K_{ij}=K_{ji}$ ,  $K_{ii}=D_i$ .

Корреляционные моменты  $K_{ij}$  образуют корреляционную матрицу. Матрица симметричная, по главной ее диагонали стоят дисперсии компонент вектора.

**Пример.** Найти корреляционный момент  $K_{\xi\eta}$  случайного вектора пр.1 §14.

**Решение.** В пр.1 §14 найдены ряды распределения компонент  $\xi$  и  $\eta$ . Воспользуемся ими и найдем  $m_\xi$  и  $m_\eta$ :

$$m_\xi = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 1 \cdot 0,45 + 3 \cdot 0,16 + 4 \cdot 0,28 + 8 \cdot 0,11 = 2,93.$$

$$m_\eta = \sum_{j=1}^2 y_j p_j = 3 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5 = 4,5.$$

Согласно (3'')

$$K_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 x_i y_j p_{ij} - m_\xi m_\eta = y_1 (x_1 p_{11} + x_2 p_{21} + x_3 p_{31} + x_4 p_{41}) + y_2 (x_1 p_{12} + x_2 p_{22} + x_3 p_{32} + x_4 p_{42}) - 2,93 \cdot 4,5 = -0,555.$$

Итак,  $K_{\xi\eta}=-0,555$ , следовательно, компоненты  $\xi$  и  $\eta$  зависимые.

#### §17. Геометрическая интерпретация корреляции

Если случайная величина  $\xi$  имеет математическое ожидание, то ее можно центрировать. Случайная величина  $\xi_0 = \xi - m_\xi$  называется центрированной, она имеет нулевое математическое ожидание.

Рассмотрим множество всех центрированных случайных величин  $\xi_0(\omega)$ , определенных на одном и том же пространстве  $\Omega$  элементарных событий и имеющих конечные дисперсии  $D_\xi < \infty$ . Можно убедиться, что это множество случайных величин линейное пространство с операциями сложения и умножения на число, понимаемыми в обычном смысле. Поэтому каждый элемент этого пространства будем называть вектором.

Скалярным произведением двух векторов  $\xi$  и  $\eta$  назовем число

$$(\xi, \eta) = M[\xi\eta] = K_{\xi\eta}. \quad (1)$$

(Убедиться самостоятельно, что (1) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, см. §17 ч.1, гл.1).

Таким образом, скалярное произведение в данном евклидовом пространстве совпадает с корреляционным моментом  $K_{\xi\eta}$ . Поскольку квадрат нормы (длины) вектора  $\xi$  в евклидовом пространстве определяется как  $(\xi, \xi) = \|\xi\|^2$ , то он совпадает с дисперсией,  $\|\xi\|^2 = D_\xi$ ,  $\|\xi\| = \sigma_\xi$ . Таким образом, норма (длина) вектора  $\xi$  есть среднее квадратичное отклонение случайной величины  $\xi$ . Коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  дается формулой:

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{(\xi, \eta)}{\|\xi\| \cdot \|\eta\|}. \quad (2)$$

Формула (2) определяет косинус угла между вектором  $\xi$  и  $\eta$ , т.е.  $r_{\xi\eta} = \cos(\xi, \eta)$ . Отсюда ясно, что некоррелированные величины  $\xi$  и  $\eta$  ортогональны. Если  $r_{\xi\eta} = \pm 1$ , то векторы коллинеарны, линейно зависимы, т.е.  $\eta = a\xi$ , где  $a$  — некоторый коэффициент.

Запишем неравенство Коши-Буняковского:

$$|(\xi, \eta)| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|. \quad (3)$$

Если (3) переписать иначе:  $K_{\xi\eta} \leq \sigma_{\xi}\sigma_{\eta}$  или  $|\gamma_{\xi\eta}| \leq 1$ , то получим доказательство утверждения, что модуль коэффициента корреляции не превышает единицы.

### §18. Понятие регрессии

Рассмотрим двумерную случайную величину  $(\xi, \eta)$ . Пусть, например,  $\xi$  - рост человека, а  $\eta$  - его вес. Ясно, что между весом и ростом существует зависимость, но эта зависимость вероятностная, ее нельзя записать в виде функции. Однако зависимость усредненных величин можно записать в виде функции. Если плотность  $f(x, y)$  непрерывной случайной величины известна, то можно найти условные плотности  $f_1(x/y)$ ,  $f_2(y/x)$  и условные математические ожидания

$$M[\eta/x] = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y/x) dy, \quad (1)$$

$$M[\xi/y] = q(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x/y) dx. \quad (2)$$

В нашем примере  $M[\eta/x]$  - это средний вес людей, рост которых одинаковый,  $\xi=x$ ; а  $M[\xi/y]$  - это средний рост людей одинакового веса,  $\eta=y$ .

Формулы (1) и (2) дают функциональную зависимость условных математических ожиданий одной случайной величины от возможных значений другой. Функция  $y=g(x)$  называется регрессией величины  $\eta$  на  $\xi$ , а функция  $x=q(y)$  - регрессией величины  $\xi$  на  $\eta$ . Графики функций  $g(x)$  и  $q(y)$  называются кривыми регрессии.

Аналогично можно найти и другие условные числовые характеристики, например, условную дисперсию

$$D[\eta/x] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - g(x))^2 \cdot f_2(y/x) dy. \quad (3)$$

Условная дисперсия  $D[\eta/x]$  определяет рассеяние случайной величины  $\eta/x$  относительно регрессии  $g(x)$ . Т.к. эта дисперсия является функцией возможных значений случайной величины  $\xi$  ( $D[\eta/x]=\varphi(x)$ ), т.е. величиной случайной, то ее усредняют, находят ее математическое ожидание. В результате усреднения получим:

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - g(x))^2 \cdot f_1(x) \cdot f_2(y/x) dy. \quad (4)$$

Здесь  $f_1(x)$  - плотность распределения случайной величины  $\xi$ . С учетом того, что  $f_1(x)f_2(y/x)=f(x,y)$ , формула (4) принимает вид:

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - g(x))^2 f(x, y) dx dy = M[(\eta - g(\xi))^2]. \quad (5)$$

Как видно из (5),  $\delta$  - это безусловная дисперсия случайной величины  $\eta$  относительно своего центра распределения  $g(x)$ . Известно, что дисперсия(рассеяние) относительно центра распределения минимальная. Отсюда вывод: если регрессию  $g(x)$  взять в качестве оценки зависимости  $\eta$  от  $\xi$  ( $\eta \approx g(\xi)$ ), то это будет наилучшая оценка этой зависимости в смысле минимума средней квадратичной погрешности.

Если случайная величина  $(\xi, \eta)$  дискретная с конечным числом возможных значений, то условные математические ожидания вычисляются по формулам:

$$M[\eta/x_i] = \sum_{j=1}^m y_j P(\eta = y_j / x_i), \quad (6)$$

$$M[\xi / y_j] = \sum_{i=1}^n x_i P(\xi = x_i / y_j). \quad (7)$$

**Пример 1.** Найти условные математические ожидания  $M[\xi/y_1]$  и  $M[\xi/y_2]$  случайной дискретной величины  $(\xi, \eta)$  примера 1 §14.

**Решение:** условные законы распределения случайных величин  $\xi/y_1$  и  $\xi/y_2$  найдены в примере 1 §15. Используя эти законы, по формуле (7) найдем

$$M[\xi/y_1] = 1 \cdot 0,30 + 3 \cdot 0,12 + 4 \cdot 0,5 + 8 \cdot 0,08 = 3,3,$$

$$M[\xi/y_2] = 1 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,06 + 8 \cdot 0,14 = 2,56.$$

**Пример 2.** Случайная величина  $(\xi, \eta)$  задана своей плотностью распределения

$$f(x, y) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \exp(-4(x-2)^2 - 6xy - 9y^2). \text{ Найти регрессии } \eta$$

на  $\xi$  и  $\xi$  на  $\eta$ .

**Решение.** Условные плотности  $f_2(y/x)$  и  $f_1(x/y)$  найдены в примере 2 §15. Используя их, по формулам (1) и (2) найдем

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y/x) dy = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-(x+3y)^2} dy = \left| \frac{x+3y=t}{3dy=dt} \right| =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t-x) e^{-t^2} dt = -\frac{1}{3}x.$$

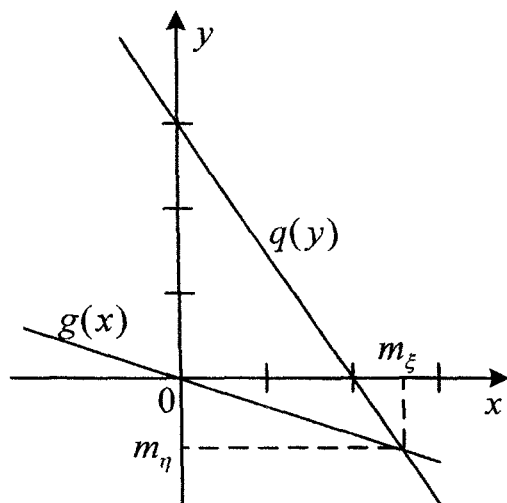
Итак,  $y=g(x) = -x/3$  - это регрессия  $\eta$  на  $\xi$ .

Аналогично

$$q(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x/y) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-4(x-2-3/4y)^2} dx = 2 - \frac{3}{4}y.$$

Таким образом,  $x=q(y) = 2-3y/4$  - регрессия  $\xi$  на  $\eta$ .

Как видно, обе регрессии линейные. Можно доказать, что если закон распределения случайной величины  $(\xi, \eta)$  нормальный, то регрессии  $\xi$  на  $\eta$  и  $\eta$  на  $\xi$



будут линейными, а прямые регрессии проходят через центр симметрии  $(m_\xi, m_\eta)$ .

**Пример 3.** Найти регрессии, если случайная величина  $(\xi, \eta)$  задана своей плотностью распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)e^{-x-y}, x > 0, y > 0.$$

**Решение.** Найдем сначала плотности распределения компонент  $\xi$  и  $\eta$  вектора  $(\xi, \eta)$ :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x + y)e^{-x-y} dy = \frac{1}{2}(1 + x)e^{-x},$$

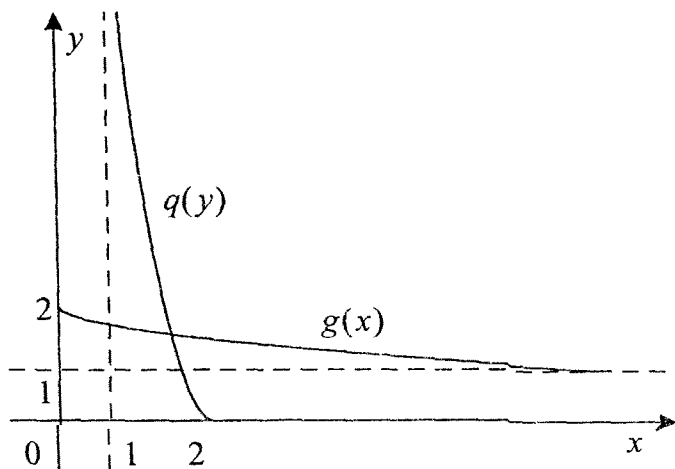
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x + y)e^{-x-y} dx = \frac{1}{2}(1 + y)e^{-y}.$$

Найдем теперь условные плотности распределения:

$$f_1(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{x + y}{1 + y} e^{-x}, \quad f_2(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{x + y}{1 + x} e^{-y}.$$



Заметим, что данная и все найденные плотности распределения отличны от нуля только в первом квадранте. Согласно формулам (1) и (2) найдем:



$$g(x) = \int_0^{\infty} y \cdot \frac{x+y}{1+x} e^{-y} dy = 1 + \frac{1}{x+1},$$

$$q(y) = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{x+y}{1+y} e^{-x} dx = 1 + \frac{1}{y+1}.$$

Итак,  $y=g(x)=1+1/(1+x)$  и  $x=q(y)=1+1/(1+y)$  - регрессии соответственно  $\eta$  на  $\xi$  и  $\xi$  на  $\eta$ . Кривые регрессии изображены на рисунке.

### §19. Оценка регрессии по выборке

Пусть закон распределения случайной величины  $(\xi, \eta)$  неизвестен. Проведем над случайной величиной  $n$  независимых испытаний (измерений), получим выборку

$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ . Ее можно обработать следующим образом.

Расположим величины  $x_i$  в строку таблицы в порядке возрастания  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ , считая все значения один раз.

Аналогично значения  $y_i$  расположим в порядке возрастания  $y_1 < y_2 < \dots < y_m$  в столбец таблицы. Подсчитаем, сколько раз повторяется пара значений  $(x_i, y_j)$ , разделим это число на число всех измерений  $n$ , получим частоту  $p_{ij}^*$ . Эту частоту поставим на пересечении  $i$ -го столбца и  $j$ -ой строки таблицы. В результате получим статистическую таблицу, аналогичную таблице распределения, приведенной в §14. Эту статистическую таблицу возьмем в качестве оценки закона распределения случайной величины  $(\xi, \eta)$ .

Суммируя частоты  $p_{ij}^*$  по столбцам (по индексу  $i$ ), получим статистический ряд распределения для компоненты  $\eta$ . Суммируя  $p_{ij}^*$  по индексу  $j$ , получим статистический ряд распределения для компоненты  $\xi$ . Имея эти статистические распределения, можно найти условные частоты:

$$P^*(\xi = x_i / y_j) = \frac{P_{ij}^*}{P^*(\eta = y_j)}; \quad P^*(\eta = y_j / x_i) = \frac{P_{ij}^*}{P^*(\xi = x_i)}.$$

Эти формулы аналогичны формулам (6,7) §15. Зная условные частоты, можно найти оценку условного математического ожидания  $M^*[\eta/x_i]$  по формуле, аналогичной формуле (6) §18. Только вероятность в ней следует заменить на частоту.

Нанесем в декартовой системе координат точки  $(x_i, M^*[\eta/x_i])$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ . Если провести среднюю линию по этим точкам, то полученную линию  $g^*(x)$  можно взять за оценку регрессии  $\eta$  на  $\xi$ . Аналогично можно поступить с точками  $(M^*[\xi/y_j], y_j)$ ,  $j=1, 2, \dots, m$  и получить оценку регрессии  $\xi$  на  $\eta$ .

Найдем теперь аналитическое выражение для оценки регрессии  $g^*(x)$ . По виду кривой  $g^*(x)$  можно сделать предположение (гипотезу) о характере зависимости: линейная  $g^*(x) = ax + b$ , квадратичная  $g^*(x) = ax^2 + bx + c$  и пр.

Неизвестные параметры  $a, b, c$  можно найти из условия минимума величины  $\delta$ , определяемой формулой:

$$\delta = M[(\eta - g^*(\xi))^2]. \quad (1)$$

(Сравним с (5) §18). Рассмотрим подробнее случай линейной функции  $g^*(x) = ax + b$ . Преобразуем выражение (1)  $M[(\eta - a\xi - b)^2] = \Phi(a, b)$  и, учитывая, что математическое ожидание от суммы равно сумме математических ожиданий (это утверждение мы докажем позже), найдем

$$\begin{aligned} \Phi(a, b) &= M[(\eta - m_\eta) - a(\xi - m_\xi) + (m_\eta - b - am_\xi)]^2 = \\ &= M[((\eta - m_\eta)^2 + a^2(\xi - m_\xi)^2 + (m_\eta - b - am_\xi)^2 - \\ &- 2a(\eta - m_\eta)(\xi - m_\xi) + 2(\eta - m_\eta)(m_\eta - b - am_\xi) - \\ &- 2a(\xi - m_\xi)(m_\eta - b - am_\xi)] = \sigma_\eta^2 + a^2\sigma_\xi^2 + \\ &+ (m_\eta - b - am_\xi)^2 - 2aK_{\xi\eta}. \end{aligned}$$

Необходимыми условиями минимума функции  $\Phi(a, b)$  являются равенства  $\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0$ . Это приводит к системе:

$$\begin{cases} m_\eta - b - am_\xi = 0, \\ a\sigma_\xi^2 - K_{\xi\eta} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решая систему (2), найдем  $a = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi^2} = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} r_{\xi\eta}$ .

$b = m_\eta - m_\xi \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi^2} = m_\eta - m_\xi \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} r_{\xi\eta}$ . Можно доказать, что

функция  $\Phi(a, b)$  действительно достигает минимума. Таким образом мы нашли аналитическое выражение для оценки линейной регрессии

$$g^*(x) = ax + b = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} r_{\xi\eta} (x - m_\xi) + m_\eta. \quad (3)$$

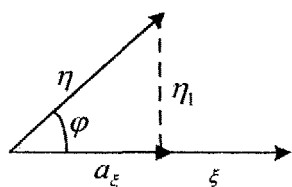
Функцию (3) называют линейной средней квадратичной регрессией  $\eta$  на  $\xi$ . Аналогично можно получить среднюю квадратичную регрессию  $\xi$  на  $\eta$ :

$$q^*(y) = \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} r_{\xi\eta} (y - m_\eta) + m_\xi. \quad (4)$$

Коэффициенты  $\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} r_{\xi\eta}$  и  $\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} r_{\xi\eta}$  называются коэффициентами регрессии.

Если все случайные величины центрированы, то из (3) получим:

$$\eta \approx g^*(\xi) = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} r_{\xi\eta} \cdot \xi. \quad (5)$$



Дадим геометрическую интерпретацию. Спроектируем вектор  $\eta$  (случайную величину  $\eta$ ) на вектор  $\xi$ . Очевидно, что  $\eta = a\xi + \eta_1$  (6)

Умножим (6) скалярно на  $\xi$  (см. §17), получим  $(\xi, \eta) = a\|\xi\|^2$ , или

$$K_{\xi\eta} = aD_\xi^2 = a\sigma_\xi^2, \text{ или } a = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi^2} = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} r_{\xi\eta}. \quad (7)$$

Перепишем (6) с учетом (7):

$$\eta = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi} r_{\xi\eta} \xi + \eta_1. \quad (6')$$

Сравнивая (6') с (5), видим, что линейная регрессия  $\xi$  на  $\eta$  есть проекция  $\xi$  на  $\eta$ . Величина  $\eta_1$  в (6) характеризует ошибку при замене  $\eta$  на  $g^*(\xi)$ .

Если теоретические числовые характеристики, входящие в линейные регрессии (3,4) неизвестны, то их заменяют на соответствующие статистические числовые характеристики. В результате получают эмпирические линейные регрессии. Статистические характеристики получают по соответствующим формулам теоретических характеристик, заменяя в них вероятность на частоту. Аналогично поступают при нахождении нелинейной регрессии.

### **§20. Числовые характеристики функции случайной величины**

Пусть случайная величина  $\xi = \xi(\omega)$  задана на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , а функция  $y = \varphi(x)$  задана на действительной оси  $-\infty < x < +\infty$ . Суперпозиция этих функций  $\varphi(\xi(\omega)) = \varphi(\xi) = \eta$  будет случайной величиной, если функция  $\varphi(x)$  интегрируемая. Рассматривают и функцию  $\varphi(\xi) = \eta$ , когда  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  - случайный вектор.

Если известен закон распределения аргумента  $\xi$ , то всегда можно найти и закон распределения функции  $\varphi(\xi) = \eta$ . Пусть, например,  $\xi$  - дискретная случайная величина, заданная рядом распределения

$x_k$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_k$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Т.к. события  $\xi = x_k$  и  $\eta = \varphi(x_k)$  равные,  $\{\xi = x_k\} = \{\eta = \varphi(x_k)\}$ , то  $P(\xi = x_k) = P(\eta = \varphi(x_k)) = p_k$ . Таким образом получается закон распределения функции  $\varphi(\xi) = \eta$ .

$\varphi(x_k)$	$\varphi(x_k)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_n)$
$p_k$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

Если  $\varphi(x_k)$  не совпадают между собой, то последняя таблица будет рядом распределения случайной величины  $\eta = \varphi(\xi)$ . Если некоторые  $\varphi(x_k)$  совпадут между собой, их можно объединить, а соответствующие вероятности сложить. Эта операция необязательна при нахождении числовых характеристик, т.к. является приведением подобных членов в сумме, что не меняет эту сумму.

Используя последнюю таблицу, запишем:

$$M[\eta] = M[\varphi(\xi)] = \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) p_k, \quad (1)$$

$$D[\eta] = D[\varphi(\xi)] = \sum_{k=1}^n (\varphi(x_k) - m_\varphi)^2 p_k, \quad (2)$$

где  $m_\varphi = M[\varphi(\xi)]$ .

Если  $\xi$  - непрерывная случайная величина, то по аналогии с (1) и (2) запишем

$$M[\eta] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx, \quad (1')$$

$$D[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x) - m_\varphi)^2 f(x) dx, \quad (2')$$

где  $f(x)$  - плотность распределения аргумента  $\xi$ .

Формулы (1') и (2') справедливы и в случае, когда  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  - случайный вектор. Тогда и  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  -  $n$ -мерный вектор,  $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ , а несобственный интеграл  $n$ -кратный. Таким образом, чтобы найти числовые характеристики функции  $\varphi(\xi)$ , достаточно знать закон распределения аргумента  $\xi$ .

Часто закон распределения аргумента  $\xi$  не известен, а известны только его числовые характеристики. Возникает задача найти числовые характеристики функции  $\varphi(\xi) = \eta$ , зная только числовые характеристики аргумента  $\xi$  этой функции. В общем случае эта задача не разрешима, однако для некоторых частных случаев ее можно решить. Рассмотрим эти частные случаи.

**Теорема 1.** Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий

слагаемых, т.е.  $M[\sum_{i=1}^n \xi_i] = \sum_{i=1}^n M[\xi_i] = \sum_{i=1}^n m_i$ .

**Доказательство.** Пусть  $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i = \varphi(\xi)$  – линейная функция случайного вектора  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $f(x)$  – плотность распределения этого вектора. Тогда, согласно (1'), имеем:

$$\begin{aligned} M[\varphi(\xi)] &= M[\sum_{i=1}^n \xi_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x) dx = \sum_{i=1}^n M[\xi_i]. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Следствие.**  $M[\sum_{i=1}^n a_i \xi_i + b] = \sum_{i=1}^n a_i m_i + b$ . Доказательство аналогично,  $a_i$  и  $b$  – неслучайные коэффициенты.

**Теорема 2.**  $D[\xi + \eta] = D_\xi + D_\eta + 2K_{\xi\eta}$ . (3)

**Доказательство.** Пусть  $\zeta = \xi + \eta$ . По теореме 1  $M[\zeta] = m_\xi + m_\eta$ .  $D[\zeta] = M[(\zeta - m_\zeta)^2] = M[((\xi - m_\xi) + (\eta - m_\eta))^2] = M[(\xi - m_\xi)^2 + (\eta - m_\eta)^2 + 2(\eta - m_\eta)(\xi - m_\xi)] = D_\xi + D_\eta + 2K_{\xi\eta}$ . Теорема доказана.

**Замечание.** Формулу (3) можно обобщить на  $n$  слагаемых:

$$D[\sum_{i=1}^n \xi_i] = \sum_{i=1}^n D[\xi_i] + 2 \sum_{i < j} K_{ij} \quad (4)$$

**Следствие 1.** Если  $\xi_i$  некоррелированы, то из (4) получим:

$$D[\sum_{i=1}^n \xi_i] = \sum_{i=1}^n D[\xi_i]. \quad (5)$$

**Следствие 2.**  $D[\sum_{i=1}^n a_i \xi_i + b] = \sum_{i=1}^n a_i^2 D[\xi_i] + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij}$ .

**Теорема 3.**  $M[\xi \cdot \eta] = m_\xi m_\eta + K_{\xi\eta}$ . (6)

**Доказательство.**

$$K_{\xi\eta} = M[(\xi - m_\xi) \cdot (\eta - m_\eta)] = M[\xi\eta - \xi m_\eta - \eta m_\xi + m_\xi m_\eta] = M[\xi\eta] - m_\xi m_\eta.$$

Теорема доказана.

**Следствие.**  $M[\xi \cdot \eta] = m_\xi m_\eta$ , если  $\xi$  и  $\eta$  некоррелированные.

**Теорема 4.** Если  $\xi$  и  $\eta$  независимые, то

$$D[\xi \cdot \eta] = D_\xi D_\eta + m_\xi^2 D_\eta + m_\eta^2 D_\xi. \quad (7)$$

**Доказательство.** Т.к.  $\xi$  и  $\eta$  независимые, то согласно следствию теоремы 3:  $M[\xi \cdot \eta] = m_\xi m_\eta$ , тогда

$$\begin{aligned} D[\xi\eta] &= M[(\xi\eta - m_\xi m_\eta)^2] = M[\xi^2 \eta^2 - 2\xi\eta m_\xi m_\eta + m_\xi^2 m_\eta^2] = \\ &= M[\xi^2] \cdot M[\eta^2] - m_\xi^2 m_\eta^2 = (D_\xi + m_\xi^2)(D_\eta + m_\eta^2) - \\ &- m_\xi^2 m_\eta^2 = D_\xi D_\eta + m_\xi^2 D_\eta + m_\eta^2 D_\xi. \end{aligned}$$

Теорема доказана. При доказательстве пользовались формулой  $\alpha_2 = M[\xi^2] = D_\xi + m_\xi^2$  (см. § 10).

**Пример.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  представляют собой ошибки, возникающие на входе прибора. Они имеют математические ожидания  $m_\xi = -2$ ,  $m_\eta = 4$ , дисперсии  $D_\xi = 4$ ,  $D_\eta = 9$ , коэффициент корреляции этих ошибок  $r_{\xi\eta} = -0,5$ . Ошибка на выходе прибора связана с ошибками на входе следующей функциональной зависимостью:

$\zeta = 3\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2 - 3$ . Найти математическое ожидание ошибки на выходе прибора.

**Решение.**  $M[\zeta] = 3M[\xi^2] - 2M[\xi\eta] + M[\eta^2] - 3$ .

$$M[\xi^2] = \alpha_2 = D_\xi + m_\xi^2 = 8, \quad M[\eta^2] = D_\eta + m_\eta^2 = 25,$$



$$K_{\xi\eta} = r_{\xi\eta} \sigma_{\xi} \sigma_{\eta} = r_{\xi\eta} \sqrt{D_{\xi} \cdot D_{\eta}} = -3,$$

$$M[\xi\eta] = m_{\xi} m_{\eta} + K_{\xi\eta} = -11.$$

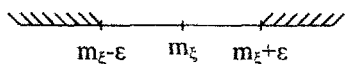
Подставляя найденные значения в первую формулу, найдем  $M[\zeta]=68$ .

## §21. Закон больших чисел

**Лемма (Чебышев).** Если случайная величина  $\xi$  имеет конечную дисперсию  $D_{\xi}$ , то имеет место следующее неравенство:

$$P(|\xi - m_{\xi}| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_{\xi}}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0. \quad (1)$$

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  - плотность распределения случайной величины  $\xi$ . Тогда



$$D_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{\xi})^2 f(x) dx \geq \int_{|x - m_{\xi}| \geq \varepsilon} (x - m_{\xi})^2 f(x) dx \geq \varepsilon^2 \int_{|x - m_{\xi}| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^2 P(|\xi - m_{\xi}| \geq \varepsilon).$$

Разделив последнее неравенство на  $\varepsilon^2$ , получим (1). Лемма доказана.

**Замечание.** Неравенство (1) можно записать в виде

$$P(|\xi - m_{\xi}| < \varepsilon) > 1 - \frac{D_{\xi}}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0. \quad (1')$$

**Определение.** Последовательность случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  называется сходящейся по вероятности к величине  $\xi_0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  имеет место равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi_0| < \varepsilon) = 1$ , что эквивалентно

равенству  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi_0| \geq \varepsilon) = 0$ . Пишут  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi_0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема (Чебышев).** Если все члены последовательности  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  имеют равномерно ограниченные дисперсии, т.е.  $D[\xi_n] < C$ , и являются попарно независимыми, то имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad (2)$$

т.е. среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий.

**Доказательство.** Рассмотрим величину  $\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ .

Найдем ее математическое ожидание и дисперсию

$$m_\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i, \quad D_\eta = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[\xi_i] \quad (\text{см. (5) §20}). \quad \text{Т.к.}$$

$D[\xi_i] < C$ , то  $D_\eta < \frac{1}{n^2} nC = \frac{C}{n}$ , т.е. дисперсия  $D_\eta$  - величина ограниченная. Тогда по лемме Чебышева

$$P(|\eta - m_\eta| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_\eta}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \text{или}$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{C}{\varepsilon^2 n}.$$

Переходя к пределу в последнем соотношении, получим (2), т.к. вероятность не может быть отрицательной.

**Замечание.** Если последовательность  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  есть результат измерения одной и той же величины  $\xi$ , то все  $\xi_i$  имеют один и тот же закон распределения, совпадающий с законом распределения  $\xi$ .

Тогда

$$M[\xi_i] = m_\xi, D[\xi_i] = D_\xi, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = m_\xi, \eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \bar{x}$$

– среднее арифметическое  $n$  измерений. Теорему Чебышева в этом случае можно записать так:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow{P} m_\xi, \text{ т.е. среднее арифметическое } n$$

измерений сходится по вероятности к математическому ожиданию измеряемой величины. Поэтому среднее арифметическое  $\bar{x}$  может служить хорошей оценкой математического ожидания. Такие оценки называют состоятельными.

**Следствие.** Пусть случайная величина  $\xi_i$  означает число появлений события  $A$  в  $i$ -ом испытании Бернулли. Тогда она имеет следующий ряд распределения:

$x_i$	0	1
$p_i$	$q$	$p$

$$M[\xi_i] = m_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = m_\xi, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i = m_\xi = p. \text{ Величина}$$

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i = k \text{ есть общее число появлений событий } A \text{ в } n$$

$$\text{испытаниях, а } \eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i = \frac{k}{n} = p_n^* \text{ - частота появления}$$

события  $A$  в  $n$  испытаниях. Равенство (2) в этом случае запишется так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|p_n^* - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \quad (3)$$

или  $p_n^* \xrightarrow{P} p$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. частота появления события стремится к вероятности этого события. Об этом говорилось в §2. Равенство (3) называют теоремой Бернулли.

Теоремы Чебышева и Бернулли выражают так называемый закон больших чисел, который устанавливает факт сходимости статистических характеристик к соответствующим теоретическим характеристикам.

**Пример 1.** Вероятность наступления события А в каждом испытании  $p=0,3$ . Оценить вероятность того, что в 10 тыс. испытаниях отклонение частоты  $p_n^*$  события А от вероятности этого события не превысит 0,01 по абсолютному значению.

**Решение.** Следует оценить величину  $P\left(\left|p_n^* - p\right| < \varepsilon\right)$  при  $\varepsilon=0,01$ . Согласно (1')

$$P\left(\left|p_n^* - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D[p_n^*]}{\varepsilon^2}. \quad (4)$$

Если  $\xi$  – число появлений события А в  $n=10^4$  испытаниях, то  $\frac{1}{n}\xi = p_n^*$  – частота,  $D_\xi = npq = 10^4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 2100$  – дисперсия.

Найдем  $D[p_n^*] = D\left[\frac{1}{n}\xi\right] = \frac{1}{n^2} D_\xi = 0,21 \cdot 10^{-4}$ .

Подставляя данные значения в (4), получим  $P\left(\left|p_n^* - p\right| < 0,01\right) > 1 - 0,21 = 0,79$ . Таким образом, искомая вероятность не меньше, чем 0,79.

## §22. Точечные оценки параметров распределения

В §11 уже отмечалось, что оценками теоретических характеристик обычно служат соответствующие статистические характеристики. Чтобы эти оценки имели практическую ценность, они должны обладать некоторыми свойствами. В частности, оценки должны быть состоятельными.

Оценка  $\alpha_n^*$  параметра  $\alpha$  называется *состоятельной*, если при неограниченном увеличении числа испытаний она сходится по вероятности к оцениваемой величине, т.е.

$\alpha_n^* \xrightarrow{p} \alpha$  при  $n \rightarrow \infty$ . Как следует из замечания к теореме Чебышева (§21), среднее арифметическое измерений  $\bar{x} = m_\xi^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  сходится по вероятности к

математическому ожиданию  $m_\xi$ . Следовательно, эта оценка математического ожидания состоятельная. Если в качестве оценки математического ожидания взять величину  $\frac{1}{2}(x_{\min} + x_{\max})$ , то эта оценка, очевидно, не будет состоятельной.

С помощью теоремы Чебышева можно доказать, что все статистические моменты, рассмотренные в §11, являются состоятельными оценками соответствующих теоретических моментов.

Второе требование, накладываемое на оценку, - это несмещенность. Оценка  $\alpha_n^*$  называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание совпадает с оцениваемым параметром, т.е.  $M[\alpha_n^*] = \alpha$ . Это позволяет избежать систематической ошибки измерений.

Докажем, что второй центральный статистический момент  $m_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_\xi)^2$  является несмещенной оценкой дисперсии  $D_\xi$ . Действительно,

$$M[m_2^*] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_\xi)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[(x_i - m_\xi)^2] = D_\xi.$$

Итак, математическое ожидание от оценки равно оцениваемому параметру, следовательно,  $m_2^*$  - несмещенная оценка.

Если в качестве оценки дисперсии взять величину

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \text{ то эта оценка будет смещенной.}$$

Действительно, преобразуем  $m_2^*$  следующим образом:

$$\begin{aligned} m_2^* &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - m_\xi))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \\ &+ 2(\bar{x} - m_\xi) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - m_\xi)^2 = S^2 + (\bar{x} - m_\xi)^2, \end{aligned}$$

или  $S^2 = m_2^* - (\bar{x} - m_\xi)^2$ . Найдем математическое ожидание

$$M[S^2] = M[m_2^*] - M[(\bar{x} - m_\xi)^2] = D_\xi - D[\bar{x}] =$$

$$= D_\xi - D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = D_\xi - \frac{1}{n} D_\xi = \frac{n-1}{n} D_\xi.$$

Воспользовались (5) §20, т.к. измерения  $x_i$  независимые. Итак,

$$M[S^2] = \frac{n-1}{n} D_\xi, \quad (1)$$

т.е. математическое ожидание оценки не равно оцениваемой величине, оценка  $S^2$  смещенная. Из (1) видно что

$$S_*^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

будет уже несмещенной оценкой дисперсии. В §11 именно эту величину мы взяли в качестве оценки дисперсии.

Оценка  $\alpha_1^*$  параметра  $\alpha$  называется более эффективной, чем оценка  $\alpha^*$  того же параметра, если  $D[\alpha_1^*] < D[\alpha^*]$ . Несмещенная оценка, дисперсия которой минимальная, называется *эффективной*. Заметим, что она не всегда существует.

Иногда закон распределения известен, но неизвестны входящие в него параметры. Например, известно, что случайная величина подчиняется гамма-распределению (см. §12), а параметры  $\lambda$  и  $\alpha$  неизвестны. Эти параметры можно оценить по выборке. Наиболее простым и распространенным методом получения оценок является метод моментов. Он состоит в приравнивании друг к другу теоретических и эмпирических моментов. Из полученных уравнений находят неизвестные параметры, которые и берут в качестве оценок. Оценки, полученные по методу моментов, являются состоятельными, но не являются, вообще говоря, эффективными и могут быть смещенными.

**Пример 1.** Оценить параметры  $\lambda$  и  $\alpha$  гамма-распределения методом моментов.

**Решение.** Известно (см. пр. 6 §12), что  $m_\xi = \frac{\alpha}{\lambda}$ ,  $D_\xi = \frac{\alpha}{\lambda^2}$ .

Заменяя  $m_\xi$  на  $\bar{x}$ , а  $D_\xi$  на  $S_*^2$ , получим систему:

$$\begin{cases} \alpha = \lambda \bar{x}, \\ \alpha = \lambda^2 S_*^2. \end{cases}$$

Решая ее, найдем  $\lambda^* = \frac{\bar{x}}{S_*^2}$ ,  $\alpha^* = \frac{(\bar{x})^2}{S_*^2}$ .

Эти оценки состоятельные, но смещенные.

Вторым наиболее распространенным методом нахождения оценок является метод наибольшего правдоподобия. Он дает состоятельную и эффективную

Оценка  $\alpha_1^*$  параметра  $\alpha$  называется более эффективной, чем оценка  $\alpha^*$  того же параметра, если  $D[\alpha_1^*] < D[\alpha^*]$ . Несмещенная оценка, дисперсия которой минимальная, называется *эффективной*. Заметим, что она не всегда существует.

Иногда закон распределения известен, но неизвестны входящие в него параметры. Например, известно, что случайная величина подчиняется гамма-распределению (см. §12), а параметры  $\lambda$  и  $\alpha$  неизвестны. Эти параметры можно оценить по выборке. Наиболее простым и распространенным методом получения оценок является метод моментов. Он состоит в приравнивании друг к другу теоретических и эмпирических моментов. Из полученных уравнений находят неизвестные параметры, которые и берут в качестве оценок. Оценки, полученные по методу моментов, являются состоятельными, но не являются, вообще говоря, эффективными и могут быть смещенными.

**Пример 1.** Оценить параметры  $\lambda$  и  $\alpha$  гамма-распределения методом моментов.

**Решение.** Известно (см. пр. 6 §12), что  $m_\xi = \frac{\alpha}{\lambda}$ ,  $D_\xi = \frac{\alpha}{\lambda^2}$ .

Заменяя  $m_\xi$  на  $\bar{x}$ , а  $D_\xi$  на  $S_*^2$ , получим систему:

$$\begin{cases} \alpha = \lambda \bar{x}, \\ \alpha = \lambda^2 S_*^2. \end{cases}$$

Решая ее, найдем  $\lambda^* = \frac{\bar{x}}{S_*^2}$ ,  $\alpha^* = \frac{(\bar{x})^2}{S_*^2}$ .

Эти оценки состоятельные, но смещенные.

Вторым наиболее распространенным методом нахождения оценок является метод наибольшего правдоподобия. Он дает состоятельную и эффективную



(если она существует) оценку параметра, но она может оказаться смещенной.

Если  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - выборка случайной величины  $\xi$ , плотность распределения  $f(x, \alpha)$  которой зависит от параметра  $\alpha$ , то функцию

$$L(x, \alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \alpha), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

называют функцией правдоподобия. Можно доказать, что функция  $L(x, \alpha)$  является плотностью распределения случайного вектора  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а поэтому максимуму функции  $L(x, \alpha)$  соответствует наиболее правдоподобное значение ее аргумента  $\alpha$ . Отсюда ясно, что за оценку параметра  $\alpha$  берут то его значение  $\alpha^*$ , при котором функция  $L(x, \alpha)$  достигает максимума. Необходимым условием максимума является равенство:

$$\frac{\partial L(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \quad (4)$$

Разрешая уравнение (4) относительно  $\alpha$ , получим оценку  $\alpha^*$  параметра  $\alpha$  по методу функции правдоподобия.

Следует, конечно, убедиться, что в точке  $\alpha^*$  достигается максимум функции  $L(x, \alpha)$ .

Если  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ , то вместо (4) получим

$$\frac{\partial L(x, \alpha)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, k. \quad (4')$$

**Пример 2.** Оценить параметр  $\lambda$  в показательном законе распределения (см. пр.5 §12) методом функции правдоподобия.

**Решение.** Составим функцию правдоподобия

$$L(x, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \bar{x}}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad \text{Запишем уравнение}$$

правдоподобия (4):

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial \lambda} = (n\lambda^{n-1} - \lambda^n n\bar{x})e^{-\lambda n\bar{x}} = n\lambda^{n-1}(1 - \lambda\bar{x})e^{-\lambda n\bar{x}} = 0.$$

Решая последнее уравнение, найдем оценку параметра  $\lambda$ :

$$\lambda^* = (\bar{x})^{-1}. \text{ Поскольку } \left. \frac{d^2 L(x, \lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=(\bar{x})^{-1}} = -n(\bar{x})^{2-n} e^{-n} < 0, \text{ то в}$$

точке  $\lambda = \lambda^*$  достигается максимум.

### §23. Характеристическая функция

Комплекснозначной случайной величиной называют функцию  $\xi_1(\omega) + i\xi_2(\omega)$ , где  $\omega \in \Omega$ ,  $(\xi_1, \xi_2)$  – случайный вектор.

Например,  $e^{it\xi} = \cos(t\xi) + i\sin(t\xi)$  – комплекснозначная случайная величина. По определению положим

$$M[\xi_1(\omega) + i\xi_2(\omega)] = M[\xi_1] + iM[\xi_2]. \quad (1)$$

**Определение.** Характеристической функцией  $\varphi_\xi(t)$  случайной величины  $\xi$  называется математическое ожидание комплекснозначной случайной величины  $e^{it\xi}$ , т.е.

$$\varphi_\xi(t) = M[e^{it\xi}]. \quad (2)$$

Если  $f(x)$  – плотность распределения случайной величины  $\xi$ , то согласно определению

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \quad (3)$$

Характеристическая функция определена для всех  $t \in (-\infty, \infty)$  и удовлетворяет условию  $|\varphi_\xi(t)| \leq 1$ . Действительно,

$$\left| \varphi_\xi(t) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{itx} \right| \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Из (3) видно, что характеристическая функция есть прямое преобразование Фурье плотности  $f(x)$ . Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим в точках непрерывности плотности (см. §5 гл. 3 ).

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix} \varphi_{\xi}(t) dt. \quad (4)$$

Из (4) следует, что если характеристические функции двух случайных величин совпадают, то совпадают и их плотности (законы) распределения. Точнее, они могут отличаться, но на множестве точек меры нуль.

Рассмотрим некоторые свойства характеристической функции.

1. Если  $\eta = a\xi + b$ , то  $\varphi_{\eta}(t) = e^{ibt} \varphi_{\xi}(at)$ . Действительно,  $\varphi_{\eta}(t) = M[e^{i\eta t}] = M[e^{ibt} \cdot e^{ia\xi t}] = e^{ibt} M[e^{ia\xi t}] = e^{ibt} \varphi_{\xi}(at)$ .

Свойство доказано.

2. Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций, т.е.

$$\varphi_{\eta}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t), \quad \eta = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Действительно,

$$\varphi_{\eta}(t) = M \left[ e^{i \sum_{i=1}^n \xi_i t} \right] = M \left[ \prod_{i=1}^n e^{i \xi_i t} \right] = \prod_{i=1}^n M \left[ e^{i \xi_i t} \right] = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t).$$

Воспользовались теоремой о математическом ожидании от произведения независимых случайных величин (см. §20).

3. Если абсолютный начальный момент  $n$ -го порядка существует, т.е.  $\alpha_n[|\xi|] = M[|\xi|^n] < \infty$ , то характеристическая функция  $\varphi_{\xi}(t)$  дифференцируема  $n$  раз, причем

$$\varphi_{\xi}^{(k)}(0) = i^k M[\xi^k] = i^k \alpha_k[\xi], \quad k=0,1,\dots,n. \quad (5)$$

**Доказательство.** Продифференцируем (3)  $k$  раз по  $t$  и убедимся, что полученный интеграл сходится.

$$\varphi_{\xi}^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^k x^k e^{itx} f(x) dx. \quad (6)$$

$$\left| \varphi_{\xi}^{(k)}(t) \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f(x) dx = \alpha_k[|\xi|^k] < \infty \text{ по условию.}$$

Следовательно, дифференцирование законно. Из (6) при  $t=0$  получим (5). Свойство доказано.

Разложим  $\varphi_{\xi}(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t=0$ , ограничившись тремя членами разложения

$$\varphi_{\xi}(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + o(t^2). \quad \text{Согласно (5) } \varphi(0)=1,$$

$$\varphi'(0)=i\alpha_1=im_{\xi}, \quad \varphi''(0)=i^2\alpha_2=-(D_{\xi}+m_{\xi}^2). \quad \text{Итак,}$$

$$\varphi_{\xi}(t) = 1 + im_{\xi}t - \frac{1}{2}(D_{\xi} + m_{\xi}^2)t^2 + o(t^2). \quad (7)$$

Рассмотрим случайную величину  $\xi$  с математическим ожиданием  $m_{\xi}=a$  и дисперсией  $D_{\xi}=\sigma^2$ . Случайная величина  $\xi^*=(\xi-a)/\sigma$

называется *нормированной*. Легко проверить, что  $M[\xi^*]=0$ ,  $D[\xi^*]=1$ . Пусть  $\xi^*$  распределена по стандартному нормальному закону, тогда ее плотность распределения

$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad \text{Найдем ее характеристическую функцию.}$$

Согласно (3)

$$\varphi_{\xi^*}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \left| \begin{array}{l} itx - \frac{1}{2}x^2 = \\ = -\frac{1}{2}(x-it)^2 - \frac{1}{2}t^2 \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} dx = \left| \begin{array}{l} x-it = u \\ dx = du \end{array} \right| = \\
&= e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-it}^{\infty-it} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = e^{-\frac{1}{2}t^2}.
\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что  $\int_{-\infty-it}^{\infty-it} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{2\pi}$ . Итак,

$$\varphi_{\xi^*}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}. \quad (9)$$

Из (8) найдем  $\xi = \sigma \xi^* + a$ . По свойству (1) и с учетом (9) получим характеристическую функцию случайной величины  $\xi$ .

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{iat} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}. \quad (10)$$

Докажем, что (10) есть характеристическая функция нормального распределения  $N(a, \sigma)$ . Действительно, по формуле (4)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \cdot e^{iat} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} dt = \\
&= \left| \begin{array}{l} -itx + iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 = \\ \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(ix-ia+\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2} \end{array} \right| = \\
&= e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(ix-ia+\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}} dt = \\
&= \left| \begin{array}{l} \frac{xi - ai + \sigma^2 t}{\sigma} = u \\ \sigma dt = du \end{array} \right| = e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty+xi-ai}^{\infty+xi-ai} e^{-\frac{1}{2}u^2} du =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

$$\text{Итак, } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (11)$$

Формула (11) доказывает наше утверждение. Таким образом, если случайная величина  $\xi$  распределена по нормальному закону  $N(a, \sigma)$ , то нормированная величина  $\xi^*$  распределена по стандартному нормальному закону  $N(0,1)$ .

## *§24. Понятие о центральной предельной теореме*

Центральная предельная теорема устанавливает условия, при которых предельный закон распределения суммы случайных величин  $\sum_{i=1}^n \xi_i$  при  $n \rightarrow \infty$ , является нормальным.

Под центральной предельной теоремой понимают группу теорем, которые отличаются друг от друга условиями, накладываемыми на распределения случайных величин  $\xi_i$ . Мы рассмотрим простейший случай, когда случайные величины  $\xi_i$  попарно независимы и одинаково распределены.

**Теорема.** Если  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения, то при неограниченном увеличении  $n$  закон распределения суммы  $\eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$  (1) стремится к нормальному.

**Доказательство.** Т.к.  $\xi_i$  одинаково распределены, то они имеют одни и те же числовые характеристики  $M[\xi_i] = a$ ,

$D[\xi_i]=\sigma^2$ . Тогда  $M[\eta_n]=na$ ,  $D[\eta_n]=n\sigma^2$ . Нормируем случайную величину  $\eta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ . Получим

$$\eta_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - a)}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^0}{\sigma\sqrt{n}}, \quad (2)$$

здесь  $\xi_i^0 = \xi_i - a$  — центрированная случайная величина. Очевидно,  $M[\xi_i^0]=0$ ,  $D[\xi_i^0]=\sigma^2$ .

Из §23 следует, что теорема будет доказана, если докажем, что характеристическая функция  $\varphi_{\eta_n^*}(t)$  нормированной

величины (2) при  $n \rightarrow \infty$  стремится к функции  $e^{-1/2t^2}$ .

Пусть характеристическая функция центрированной величины  $\xi_i^0$  равна  $\varphi(t)$ ,  $\varphi_{\xi_i^0}(t) = \varphi(t)$ . Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности  $t=0$ , сохранив три члена разложения. Согласно (7) §23 имеем:

$$\varphi(t) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2). \quad (3)$$

Используя свойства (1) и (2) §23, найдем характеристическую функцию случайной величины  $\eta_n^*$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{\eta_n^*}(t) &= \left( \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right)^n = \left( 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right) \right)^n = \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2n}t^2 + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right) \right)^n. \end{aligned}$$

Прологарифмируем последнее равенство

$$\ln \varphi_{\eta_n^*}(t) = n \ln \left( 1 - \frac{1}{2n}t^2 + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right) \right) \approx n \left( -\frac{t^2}{2n} \right) = -\frac{t^2}{2}.$$

Последнее означает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{*n}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ . Теорема

доказана.

Пусть  $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$  - число появлений события А в n испытаниях Бернулли (см. §21). Параметрами случайной величины являются  $M[\xi]=np$ ,  $D[\xi]=npq$ . Согласно доказанной теореме случайная величина  $\xi$  при больших n распределена приближенно по нормальному закону. Поэтому

$$P(\alpha < \xi < \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \quad (4)$$

Здесь  $\Phi(x)$  - интеграл вероятности. Формула (4) есть теорема Лапласа-Муавра.

При расчетах на ЭВМ неизбежны округления, что приводит к ошибкам результата вычислений (погрешность округления). Пусть  $\xi_i$  - погрешность i-го округления. Будем считать  $\xi_i$  независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на интервале  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Пусть производится n сложений, тогда  $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$  - ошибка

округления суммы. Если n достаточно велико, то согласно центральной предельной теореме суммарная ошибка  $\xi$  распределена по нормальному закону. Найдем его параметры. Очевидно,  $M[\xi_i]=0$  в силу симметричности распределения,  $D[\xi_i] = \frac{1}{3}\varepsilon^2$  (см. пр.4 §12). Тогда  $M[\xi]=0$ ,

$$D[\xi] = \frac{1}{3}\varepsilon^2 n, \sigma_\xi = \frac{1}{3}\varepsilon\sqrt{3n}.$$

Если воспользоваться правилом "трех сигма" (см. п.7 §12), то можно считать, что ошибки округления не выйдут за границы интервала  $(-3\sigma_\xi, 3\sigma_\xi)$  или



$(-\varepsilon\sqrt{3n}, \varepsilon\sqrt{3n})$ . Это утверждение называют правилом Чеботарева.

## §25. Доверительный интервал

Точечная оценка  $\alpha^*$  некоторой числовой характеристики  $\alpha$ , как уже отмечалось, является случайной величиной. Ясно, что замена точного (но неизвестного) значения  $\alpha$  на оценку  $\alpha^*$  может привести в некоторых случаях к серьезным ошибкам. Поэтому необходимо определить точность (надежность) оценки  $\alpha^*$ . Для определения надежности оценки пользуются доверительной вероятностью и доверительным интервалом. Зададим некоторую достаточно большую вероятность  $\beta$ , например,  $\beta=0,9$ ,  $\beta=0,95$ ,  $\beta=0,99$  и найдем такое значение  $\varepsilon>0$ , для которого выполняется неравенство

$$P(|\alpha - \alpha^*| < \varepsilon) = \beta. \quad (1)$$

Равенство (1) можно переписать в виде

$$P(\alpha^* - \varepsilon < \alpha < \alpha^* + \varepsilon) = \beta. \quad (1')$$

Равенство (1') означает, что точное, но неизвестное  $\alpha$  накрывается интервалом  $l_\beta = (\alpha^* - \varepsilon, \alpha^* + \varepsilon)$  с вероятностью  $\beta$ . Интервал  $l_\beta$  называется доверительным, а вероятность  $\beta$  доверительной вероятностью или надежностью.

Найдем доверительный интервал для математического ожидания  $m_\xi$ , если за его оценку взято среднее арифметическое  $n$  независимых измерений, т.е.

$$m_\xi^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad \text{Пусть } M[x_i] = a, \quad D[x_i] = \sigma^2. \quad \text{Тогда}$$

$$M[\bar{x}] = a, \quad D[\bar{x}] = \frac{1}{n} \sigma^2, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Предположим, что измерения  $x_i$  распределены нормально  $N(a, \sigma)$ . Тогда их характеристическая функция

$$\varphi_{x_i}(t) = e^{at} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad (\text{см. (10) §23}).$$

Согласно свойствам (1) – (2) §23 характеристической функцией случайной величины  $\bar{x}$  будет

$$\varphi_{\bar{x}}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{x_i}\left(\frac{t}{n}\right) = e^{at} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2n}}. \quad (2)$$

Из (2) видно, что  $\bar{x}$  распределена по нормальному закону  $N(a, \sigma)$ . Тогда согласно (1)

$$P\left(|\bar{x} - a| < \varepsilon\right) = P(a - \varepsilon < \bar{x} < a + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma / \sqrt{n}}\right) - \\ - \Phi\left(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma}\right) = \beta.$$

Из последнего уравнения найдем:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2} \beta\right). \quad (3)$$

Здесь  $\Phi^{-1}(x)$  - функция, обратная интегралу вероятностей. Итак, если средняя квадратичная ошибка измерений  $\sigma$  известна, то по формуле (3) найдем  $\varepsilon$  и, следовательно, найдем доверительный интервал  $l_\beta = (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ .

**Замечание.** Если независимые измерения  $x_i$  распределены по закону, отличному от нормального, то, согласно центральной предельной теореме, сумма  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$  при

больших  $n$  распределена по нормальному закону. Поэтому и в этом случае можно пользоваться формулой (3).

Если  $\sigma$  неизвестна, то формулой (3) пользоваться нельзя. В этом случае поступим следующим образом. Рассмотрим случайную величину

$$\tau = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - a}{S_*}, \quad (4)$$

где  $S_*^2 = D_\xi^* = D_{x_i}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  - оценка дисперсии.

Доказано, что если  $x_i$  распределены нормально, то случайная величина  $\tau$  распределена по закону Стьюдента с  $n-1$  степенью свободы. Ее плотность распределения дается формулой

$$S_{n-1}(t) = A \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \quad A = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^{-1}. \quad (5)$$

Зная закон распределения  $\tau$ , можно найти доверительный интервал для математического ожидания. Из (1) получим

$$P\left(|\bar{x} - a| < \varepsilon\right) = P\left(\frac{\sqrt{n}|\bar{x} - a|}{S_*} < \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{S_*}\right) = P\left(|\tau| < t_\beta\right) = \beta,$$

где  $t_\beta = \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{S_*}$ , а  $\tau$  определяется формулой (4). Т.к.

распределение Стьюдента симметричное, то

$$P(|\tau| < t_\beta) = \int_{-t_\beta}^{t_\beta} S_{n-1}(t) dt = 2 \int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t) dt = \beta. \quad (6)$$

Из равенства (6) найдем  $t_\beta$ , а поскольку  $t_\beta = \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{S_*}$ , то

$\varepsilon = \frac{t_\beta S_*}{\sqrt{n}}$  и доверительный интервал  $l_\beta$ , будет известен:

$$l_\beta = (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon) = \left(\bar{x} - \frac{t_\beta S_*}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{t_\beta S_*}{\sqrt{n}}\right).$$

Величину  $t_{\beta}$  находят по специальным таблицам или вычисляют на ЭВМ.

**Пример 1.** Найти доверительный интервал для величины заряда электрона по данным Милликена, если  $\beta=0,99$  (см. §11).

**Решение.** Будем считать, что ошибки измерений, следовательно, и сами измерения  $x_i$  распределены нормально. Т.к.  $\sigma$  неизвестна, то воспользуемся формулой (6)

$$2 \int_0^{t_{\beta}} S_{n-1}(t) dt = 0,99.$$

По таблице найдем  $t_{\beta}=2,665$ . Тогда

$$\varepsilon = \frac{t_{\beta} S_*}{\sqrt{n}} = \frac{t_{\beta} \sqrt{D^*}}{\sqrt{58}} = 0,0054, \quad D^* = 234 \cdot 10^{-6}. \quad (\text{см. §11})$$

Т.к.  $\bar{x} = 4,7808$ , то доверительный интервал будет  $I_{0,99} = (\bar{x} - \varepsilon; \bar{x} + \varepsilon) = (4,7754; 4,7862)$ .

Найдем теперь доверительный интервал для дисперсии, если независимые измерения распределены нормально, а в качестве оценки дисперсии взята величина

$$S_*^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (7)$$

Преобразуем (7) следующим образом

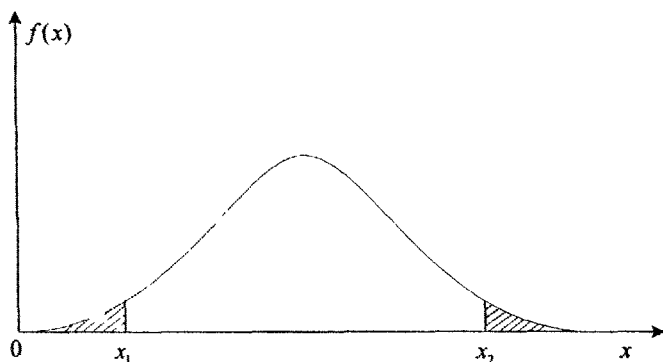
$$\frac{S_*^2 (n-1)}{\sigma^2} = \chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2. \quad (8)$$

Величины  $\xi_i^* = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$  нормированные, независимые со стандартным нормальным распределением  $N(0,1)$  (см. §23). Доказано, что величина  $\chi^2$  в этом случае распределена по закону хи-квадрат с  $(n-1)$  степенью свободы. Плотность  $f(x)$  этого распределения см. §12. Зная закон распределения,

найдем вероятность попадания величины  $\chi^2$  в любой интервал  $(x_1, x_2)$ . Пусть

$$P \left( x_1 < \frac{S_*^2(n-1)}{\sigma^2} < x_2 \right) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \beta, \quad (9)$$

где  $\beta$  – доверительная вероятность. Т.к. кривая



распределения не симметричная, то в уравнении (9) два неизвестных:  $x_1$  и  $x_2$ . Поэтому наложим дополнительное условие, а именно, потребуем равенства

$$\int_0^{x_1} f(x) dx = \int_{x_2}^{\infty} f(x) dx. \quad (10)$$

Поскольку  $\int_0^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{\infty} f(x) dx = 1$  (см. рис), то

из (9) и (10) следует

$$2 \int_0^{x_1} f(x) dx = 1 - \beta, \quad 2 \int_{x_2}^{\infty} f(x) dx = 1 - \beta. \quad (11)$$

Из уравнений (11) найдем неизвестные  $x_1$  и  $x_2$ . Т.к.

$$x_1 < \frac{S_*^2(n-1)}{\sigma^2} < x_2, \text{ то } \frac{1}{x_2} < \frac{\sigma^2}{S_*^2(n-1)} < \frac{1}{x_1} \text{ или}$$

$$\frac{S_*^2(n-1)}{x_2} < \sigma^2 < \frac{S_*^2(n-1)}{x_1}. \quad (12)$$

Из (12) следует искомый доверительный интервал для дисперсии  $D_\xi = \sigma^2$

$$I_\beta = \left( \frac{S_*^2(n-1)}{x_2}, \frac{S_*^2(n-1)}{x_1} \right). \quad (13)$$

**Пример 2.** Найти доверительный интервал для дисперсии измерений заряда электрона (см. §11).

**Решение.** По таблице распределения хи-квадрат при  $n=58$ ,  $\beta=0,99$  найдем  $x_1=33,21$  и  $x_2=88,18$ . Согласно (13)

$$I_{0,99} = \left( \frac{234 \cdot 10^{-6} \cdot 57}{88,18}; \frac{234 \cdot 10^{-6} \cdot 57}{33,21} \right) = (151 \cdot 10^{-6}; 402 \cdot 10^{-6}).$$

Средняя квадратичная ошибка  $\sigma$  измерений с вероятностью  $\beta=0,99$  лежит в интервале

$$(\sqrt{151 \cdot 10^{-6}}; \sqrt{402 \cdot 10^{-6}}) = (0,012; 0,020).$$

## *Содержание*

### **Глава 1. Функции комплексного переменного**

§1. Понятие функции комплексного переменного.	
Предел, непрерывность функции.....	3
§2. Производная функции комплексного переменного. Понятие аналитической функции .....	7
§3. Геометрический смысл производной .....	11
§4. Интеграл от функции комплексного переменного... ..	13
§5. Ряды Тейлора и Лорана.....	19
§6. Классификация особых точек. Вычеты.....	24
§7. Вычисление интегралов с помощью вычетов.....	28

### **Глава 2. Операционное исчисление**

§1. Преобразование Лапласа, основные понятия .....	33
§2. Свойства преобразования Лапласа .....	37

§3. Теоремы умножения и разложения.....	43
§4. Применения операционного исчисления .....	47

### **Глава 3. Ряды и интеграл Фурье**

§1. Ортогональные системы функций .....	53
§2. Ряд Фурье, свойства.....	56
§3. Тригонометрический ряд Фурье.....	61
§4. Характер и скорость сходимости ряда Фурье.....	66
§5. Преобразование и интеграл Фурье.....	68

### **Глава 4. Методы математической физики**

§1. Гамма-функция .....	73
§2. Дельта-функция .....	75
§3. Уравнения математической физики.....	77
§4. Задачи математической физики. Метод Даламбера.....	81
§5. Метод интегральных преобразований.....	83
§6. Метод разделения переменных .....	84

### **Глава 5. Теория вероятностей и математической статистики**

§1. Некоторые сведения из комбинаторики .....	87
§2. Предмет теории вероятностей. Три подхода к определению вероятности.....	89
§3. Пространство элементарных событий. Операции над событиями.....	94
§4. Аксиоматическое определение вероятности.....	98
§5. Условная вероятность. Независимость событий .....	102
§6. Формулы полной вероятности и Байеса .....	105
§7. Последовательности испытаний. Формулы Бернулли и Пуассона.....	108
§8. Случайная величина. Функция распределения и плотность распределения.....	110
§9. Свойства функции распределения и плотности	

распределения .....	114
§10. Числовые характеристики случайной величины....	119
§11. Элементы математической статистики.	
Основные понятия .....	123
§12. Примеры некоторых распределений .....	128
§13. Понятие о критериях согласия .....	140
§14. Многомерная случайная величина. Функция и плотность распределения.....	143
§15. Независимость случайных величин. Условные распределения .....	148
§16. Числовые характеристики многомерной случайной величины.....	151
§17. Геометрическая интерпретация корреляции.....	155
§18. Понятие регрессии.....	156
§19. Оценка регрессии по выборке .....	160
§20. Числовые характеристики функции случайной величины.....	164
§21. Закон больших чисел.....	168
§22. Точечные оценки параметров распределения.....	171
§23. Характеристическая функция.....	176
§24. Понятие о центральной предельной теореме.....	180
§25. Доверительный интервал .....	183
<b>Содержание .....</b>	<b>188</b>



**Фирсов Иван Парфенович  
Цирулик Владимир Григорьевич  
Сапунцов Николай Евгеньевич  
Клово Александр Георгиевич  
Гадельшин Валерий Камельянович**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**  
**по**  
**курсу высшая математика**  
**(II часть)**

ЛР №020565

Подписано к печати 10.04.2000 г.

Бумага офсетная.

Усл. п. л. – 12.5.

Тираж 500 экз.

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Печать офсетная.

Уч-изд. л. – 13

Заказ № 99

«С»

---

Издательство Таганрогского государственного  
радиотехнического университета, ГСП – 17А,  
Таганрог-28, Некрасовский пер, 44  
Типография Таганрогского государственного  
радиотехнического университета ГСП-17А,  
Таганрог-28, Энгельса, 1.