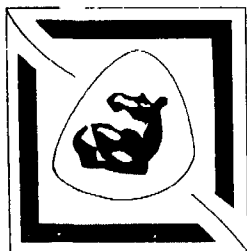


517/519(075)

К 65

Министерство общего и профессионального образования  
Российской Федерации  
Таганрогский государственный радиотехнический  
университет



Естественно-гуманитарный  
факультет

**УНТЦ ЕГФ**

Кафедра  
высшей математики

Фирсов И.П., Цирулик В.Г.,  
Сапунцов Н.Е., Клово А.Г.,  
Гадельшин В.К.

**РИТМ ВМ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**  
по  
курсу высшая математика  
(I часть)

Таганрог 1999

Составители: Фирсов И.П., Цирулик В.Г.,  
Сапунцов Н.Е., Клово А.Г.,  
Гадельшин В.К.

УДК 517(07.07)

Конспект лекций по курсу высшая математика (I часть) /  
Таганрогский радиотехнический ун-т. Сост. Фирсов И.П.,  
Цирулик В.Г., Сапунцов Н.Е., Клово А.Г.,  
Гадельшин В.К. Таганрог, 1999, 388 с.

# ГЛАВА 1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Элементы линейной алгебры

## § 1. Расширение понятия числа. Комплексные числа, действия над ними

Вспомним известные из школьной программы числовые множества и арифметические действия, которые в них определены.

Прежде всего, это множество натуральных чисел  $N$ , в котором возможны сложение, умножение и возведение в степень с натуральным показателем. Такие, например, действия как вычитание и деление не всегда возможны над числами из  $N$ , если результат должен снова принадлежать  $N$ .

Если присоединить к  $N$  число ноль и все целые отрицательные числа, то получим множество целых чисел, обозначаемые  $Z$ .  
Целые числа  
удобно



изображать на числовой оси равноотстоящими точками.

Для любых целых чисел операция вычитания уже определена, но операция деления для некоторых пар целых чисел приводит к результату (числу), которого нет в  $Z$ .

Присоединим к  $Z$  все дроби (числа вида  $\frac{p}{q}$ ,  $p, q$  — любые

целые числа,  $q \neq 0$ ). Полученное множество обозначают через  $Q$  и называют множеством рациональных чисел. Заметим, что при  $q = 1$  получаются целые числа.

Во множестве  $Q$  можно выполнять все четыре арифметических действия (сложение, вычитание, умножение, деление на число отличное от нуля), но,

например, операция извлечения квадратного корня не всегда приводит к рациональному числу. Например,  $\sqrt{2}$  не является рациональным числом.

Известно, что всякое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби и, наоборот, каждую такую дробь можно записать в виде рационального числа.

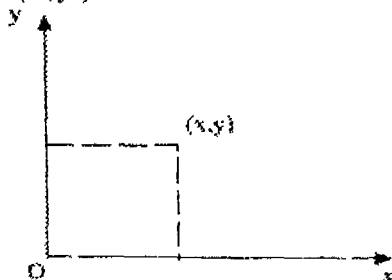
Существуют числа, называемые иррациональными, для которых запись в виде бесконечной периодической десятичной дроби невозможна, например,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{5}$  и т.д.

Присоединим все иррациональные числа к множеству  $Q$ , получим множество вещественных чисел, обозначаемое  $R$ . В  $R$  операция извлечения корня возможна для положительных чисел. Вещественные (действительные) числа геометрически изображаются точками на числовой оси таким образом, что между всеми вещественными числами и точками оси существует взаимно-однозначное соответствие.

Рассматривая уравнение  $x^2 + 4 = 0$ , мы обнаруживаем, что оно не имеет решений, хотя никаких видимых причин для этого нет.

Расширим множество вещественных чисел так, чтобы в новом множестве чисел уравнения, аналогичные вышеуказанному имели решение.

**Опр.1.** Упорядоченная пара двух действительных чисел  $(x, y)$  называется комплексным числом.



Геометрически комплексное число изображается точкой плоскости  $xOy$ . В декартовой системе координат числа  $x$  и  $y$  являются ее координатами. Так что числа вида  $(x, 0)$  — это действительные числа, т.е.

множество действительных чисел входит в множество  $\mathbb{C}$  комплексных чисел.

Число  $x = \operatorname{Re} z$  называется реальной (вещественной) частью комплексного числа  $z = (x, y)$ , а число  $y = \operatorname{Im} z$  — мнимой частью этого комплексного числа.

Два комплексных числа  $z_1 = (x_1, y_1)$  и  $z_2 = (x_2, y_2)$  называются равными, если равны их действительные и мнимые части, т.е.  $z_1 = z_2$ , если  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ . Соотношение больше-меньше для комплексных чисел не вводится.

Определим действия над комплексными числами.

Пусть  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ . Положим по определению

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2), \quad (1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (2)$$

Легко убедиться, что в частном случае, когда числа действительные, т.е.  $y_1 = y_2 = 0$ , формулы (1,2) не противоречат обычным действиям над действительными числами (убедиться в этом самостоятельно).

Легко также убедиться, что коммутативный закон сложения и умножения выполняется и для комплексных чисел, т.е.  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  и  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ .

Выполняется и дистрибутивный закон  $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ .

Умножим число  $z_1 = (0, 1)$  само на себя. Воспользовавшись (2), получим  $z_1^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ . Итак, квадрат комплексного числа  $(0, 1)$  равен минус единице. Это число называют мнимой единицей и обозначают так  $(0, 1) = i$ . Таким образом,  $i^2 = -1$ ,  $\sqrt{-1} = i$ , т.е. в множестве комплексных чисел возможно извлечение квадратного корня из отрицательного числа.

Используя мнимую единицу  $i$ , можно комплексное число записать в другом виде. Действительно

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)y = x + iy.$$

Получили, так называемую, алгебраическую форму записи комплексного числа. Если комплексные числа записаны в алгебраической форме, то действия над ними можно осуществлять, как аналогичные действия над многочленами, учитывая только, что  $i^2 = -1$ .

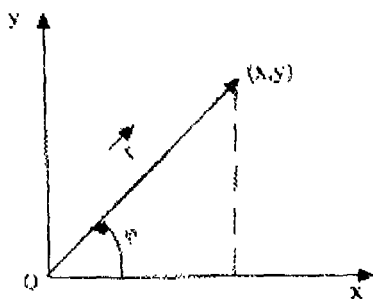
Комплексные числа  $z = (x, y) = x + iy$  и  $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$  называются взаимно сопряженными.

Деление комплексных чисел вводится следующим образом

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (3)$$

**Пример 1.**  $\frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = -i.$

## § 2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа



Как уже отмечалось, геометрической интерпретацией комплексного числа является точка на плоскости. Положение точки определяется ее радиус-вектором  $\vec{r}$ . В декартовой системе координат положение точки определяют ее координаты  $x$  и  $y$ . В полярной системе координат положение точки определяют координаты:  $\varphi$  – угол между осью  $x$  и радиус-вектором  $\vec{r}$  и расстояние  $r$  от начала координат до точки. Связь между декартовыми и полярными координатами следующая:

$x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Учитывая это, комплексное число можно записать в виде

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1)$$

Формула (1) дает еще одну форму записи комплексного числа — тригонометрическую. При этом

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  называется *модулем комплексного числа*, а угол  $\varphi = \text{Arg}z$  — *аргументом комплексного числа*. Заметим, что угол определяется не однозначно, а с точностью до периода  $2\pi k$ , поэтому вводят понятие *главного значения аргумента* —  $\arg z$ . Так что  $\text{Arg}z = \arg z + 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Будем считать, что  $-\pi < \arg z \leq \pi$ , тогда

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, x > 0, \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} y, x = 0, \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi \operatorname{sgn} y, x < 0. \end{cases} \quad \text{где } \operatorname{sgn} \alpha = \begin{cases} -1, \alpha < 0, \\ 0, \alpha = 0, \\ 1, \alpha > 0. \end{cases}$$

**Пример 1.** Представить числа  $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$  в тригонометрической форме.

**Решение.**  $z_1 = 2(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi)$ ;

$$z_2 = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})).$$

Умножим два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \quad (2)$$

Как видно из формулы (2), при умножении чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Правило это распространяется на любое число сомножителей. В частности, если  $z_1 = z_2 = \dots = z_n$ , получим

$$z_1^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (3)$$

Формула (3) называется формулой Муавра.

Аналогично можно убедиться, что при делении чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются (убедиться в этом самостоятельно)

Рассмотрим действие извлечения корня  $n$ -ой степени ( $n$  - натуральное) из комплексного числа. Предположим, что в результате извлечения этого корня получится опять некоторое комплексное число

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Найдем неизвестные  $\rho$  и  $\phi$ . Для этого возведем обе части полученного равенства в  $n$ -ю степень. Используя формулу Муавра, получим, что

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) \quad (4)$$

Равные комплексные числа имеют равные модули, а аргументы отличаются на  $2\pi k$ . Поэтому из (4) следует

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \phi = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Итак,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right). \quad (5)$$

Можно убедиться, что формула (5) дает ровно  $n$  различных корней при  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

**Пример 2.** Найти  $\sqrt[3]{1}$

**Решение.**

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{3}.$$

При  $k = 0, 1, 2$  получаются корни

$$\alpha_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$$

$$\alpha_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),$$

$$\alpha_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i\sin \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$$



При  $k=3$   $\alpha_3 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ , что совпадает с  $\alpha_0$ . Все последующие корни будут повторяться, так что различных корней будет только три.

Положим по определению для всех вещественных  $y$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (6)$$

Формула (6) называется формулой Эйлера,  $e \approx 2,718$  – иррациональное число, основание натурального логарифма. Используя формулу Эйлера и предполагая верными обычные правила действия со степенями, найдем  $\forall z \in \mathbb{C}$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (7)$$

Замечание 1. Формула (7) определяет функцию комплексного переменного  $z$   $f(z) = e^z$ . Функция эта периодическая с периодом  $2\pi ki$ .

Действительно,

$$f(z + 2\pi ki) = e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z (\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = e^z, \\ \text{т.е. } f(z + 2\pi ki) = f(z).$$

Используя формулу Эйлера, получим еще одну форму записи комплексного числа – показательную.

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi} = |z|e^{i \operatorname{arg} z} = |z|e^{i \operatorname{arg} z}. \quad (8)$$

Назовем логарифмом числа  $z$  комплексное число  $\omega = u + iv$  такое, что  $e^\omega = z$ . Таким образом  $\omega = \operatorname{Ln} z = u + iv$ .

Пусть  $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{arg} z}$ , тогда

$$e^\omega = e^u \cdot e^{iv} = z = |z| \cdot e^{i \operatorname{arg} z} \quad (9)$$

Найдем модуль и аргумент числа  $e^\omega$

$$|e^\omega| = |e^u \cdot e^{iv}| = e^u |\cos v + i \sin v| = e^u \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v} = e^u.$$

Тогда очевидно  $\operatorname{arg}(e^\omega) = v$ . Из равенства комплексных чисел (9) получим  $e^u = |z|, v = \operatorname{arg} z + 2\pi k$ . Следовательно

$$\omega = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{arg} z + 2\pi ki, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

Замечание 2. Формула (10) определяет функцию комплексного переменного  $f(z) = \operatorname{Ln} z$ , правда, эта функция многозначна, т.к. одному значению аргумента  $z$  она ставит в соответствие бесконечное множество значений функции

Можно убедиться в справедливости обычных правил логарифмирования. В частности  $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ ,

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2 \quad \text{Однако, в силу многозначности}$$

логарифмической функции  $\operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_1 = 2\pi k i$

**Пример 3.** Найти  $\operatorname{Ln}(-i)$

**Решение.** Согласно формуле (10)

$$\operatorname{Ln}(-i) = \ln|-i| + i \arg(-i) + 2\pi k i = -\frac{\pi}{2} - i + 2\pi k i$$

Рассмотрим теперь возвышение комплексного числа в любую комплексную степень. По определению положим

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \operatorname{Ln} z_1} \quad (11)$$

**Пример 4.** Найти  $(-i)^i$

**Решение.** Согласно формуле (11) и результату примера 3,

$$\text{получим } (-i)^i = e^{i \operatorname{Ln}(-i)} = e^{i(-\frac{\pi}{2} - i + 2\pi k i)} = e^{\frac{\pi}{2} - 2\pi k}$$

**Пример 5.** Найти  $(-i)^2$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } (-i)^2 &= e^{2 \operatorname{Ln}(-i)} = e^{2(-\frac{\pi}{2} - i + 2\pi k i)} = e^{-\pi - 2i + 4\pi k i} = \\ &= e^{-\pi} = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1 \end{aligned}$$

### § 3. Понятие матрицы и определителя.

#### Свойства определителей

Матрицей размера  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы  $A$ , стоящий на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца обозначают  $a_{ij}$ . Приведем примеры матриц.

$$A_1 = (1 \quad -1 \quad 3 \quad 5 \quad 6)_{1 \times 5}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3 \times 1}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 2},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 3}.$$

Если число строк  $m$  равно числу столбцов  $n$  матрицы, то она называется квадратной  $n$ -ого порядка.

Одной из основных числовых характеристик квадратной матрицы является ее определитель (детерминант).

Определителем матрицы второго порядка  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

называется число, определяемое формулой

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (1)$$

Определители часто используются для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = h_2. \end{cases} \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}$$

Умножим обе части первого уравнения на  $a_{22}$ , а второго на  $(-a_{12})$  и результаты сложим. Получим  $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = h_1a_{22} - h_2a_{12}$  или  $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$ , где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} \\ h_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определитель  $\Delta$  называется определителем системы, а определитель  $\Delta_1$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены первого столбца на столбец свободных членов системы.

Умножив первое уравнение системы на  $(-a_{21})$ , второе на  $a_{11}$ , аналогично найдем  $\Delta \cdot x_2 = \Delta_2$ . Определитель  $\Delta_2$  получается из определителя  $\Delta$  путем замены второго столбца на столбец свободных членов. Если  $\Delta \neq 0$ , то решения системы запишутся в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (2)$$

Формулы (2) называются формулами Крамера.

**Пример.** Решить систему  $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$

**Решение.** Вычислим определители  $\Delta$ ,  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  по формуле (1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

Используя формулы Крамера, получим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{5}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{5}$$

**Опр.1.** Минором  $M_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  называют определитель, который получается из определителя матрицы  $A$  путем вычеркивания  $i$ -ой строки и  $j$ -ого

столбца. Рассмотрим для примера матрицу третьего порядка и ее некоторые миноры.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Выражение  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , называется алгебраическим дополнением элемента  $a_{ij}$ .

Определителем матрицы  $n$ -ого порядка назовем число, определяемое формулой

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j}. \quad (3)$$

Формулу (3) называют правилом раскрытия определителя по элементам первой строки. Знак  $\sum$  означает суммирование. Для примера раскроем определитель матрицы третьего порядка.

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).$$

Зная теперь, как вычисляются определители третьего порядка, можем вычислить по формуле (3) определитель четвертого порядка и т.д.

Рассмотрим некоторые свойства определителей.

1. Определитель изменит только знак, если поменять местами две его строки (без доказательства).

Проверим это свойство на определителе второго порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -\Delta.$$

Свойство выполняется

**Следствие.** Если определитель имеет две одинаковые строки, то он равен нулю.

**Доказательство.** Поменяем две одинаковые строки, определитель не изменится. Но согласно свойству 1 он должен изменить знак, т.е. должно выполняться равенство,  $\Delta = -\Delta$ , что возможно только при  $\Delta = 0$ .

**2. (Теорема Лапласа).** Определитель можно раскрывать по элементам любой строки ( без доказательства).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, i = 1, 2, \dots, n.$$

**Следствие.** Если в определителе имеется нулевая строка, то он равен нулю. Доказательство очевидно.

**3.** Общий множитель любой строки определителя можно вынести за его знак, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Доказательство.** Разложить левый и правый определители по элементам  $i$ -ой строки. Результаты будут одинаковые.

**Следствие.** Если определитель имеет пропорциональные строки, то он равен нулю. Доказательство. Вынося коэффициент пропорциональности за знак определителя, получим определитель с двумя одинаковыми строками, который равен нулю.

#### 4. (Правило сложения определителей).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Доказательство следует из теоремы Лапласа. Раскрывая определители в левой и правой частях равенства по элементам  $i$ -ой строки, получим одно и то же.

**Следствие.** Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки добавить соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

**Доказательство.** Представим полученный определитель в виде суммы двух определителей согласно свойству 4. Первый определитель совпадает с данным, а второй будет содержать пропорциональные строки и следовательно равен нулю.

5. Сумма произведений элементов некоторой строки на соответствующие алгебраические дополнения другой строки равна нулю,  $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0, i \neq k$ .

**Доказательство.** Рассмотрим два определителя  $A_1$  и  $A_2$ , которые отличаются только  $k$ -ой строкой.

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если раскрывать определители по  $k$ -ой строке, то алгебраические дополнения  $A_{kj}$ , будут одинаковыми для обоих определителей.

$$A_2 = \sum_{j=1}^n b_{kj} A_{kj}. \quad (4)$$

Положим теперь  $b_{kj} = a_{ij}$ ,  $i \neq k$  т.е. заменим  $k$ -ю строку определителя на  $i$ -ю. Тогда определитель будет иметь две одинаковые строки и обратится в нуль.

Из (4) найдем  $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = 0$ , ч. т. д.

$$\text{Таким образом, } \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} \det A, \quad (5)$$

где  $\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases}$   $\delta_{ik}$  - символ Кронекера.

**6.** Если в квадратной матрице строки сделать соответствующими столбцами, т.е. транспонировать матрицу, то ее определитель не изменится (без доказательства).

**Следствие.** Все предыдущие свойства и следствия, верные для строки, верны и для столбца.

**Пример.** Вычислить определитель  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ .



**Решение.** Используя свойства определителей, получим в первой строке еще два нуля.

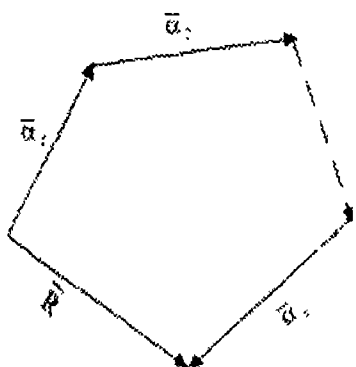
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 20 & -5 \end{vmatrix} = -5.$$

#### **§ 4. Геометрические векторы, линейная зависимость, базис**

Геометрическим вектором, как известно, называют направленный отрезок. Он характеризуется своей длиной (модулем) и направлением.

В математике изучают так называемые свободные векторы. Свободные векторы считаются равными, если их модули равны, а направления одинаковые. В физике, однако, важна точка приложения вектора (силы) или линия действия вектора (момента силы). Такие векторы не являются свободными. Это, соответственно, связанные и скользящие векторы.

Под линейными операциями над векторами понимают сложение векторов и умножение вектора на число. Складывают два вектора по правилу параллелограмма (треугольника). Это правило можно обобщить на  $n$  слагаемых. Пристраивая каждый раз в конец предыдущего вектора начало последующего, получим пространственную ломаную линию. Вектор, соединяющий начало первого и конец последнего и будет



суммой  $n$  векторов  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$ .

При умножении вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  его модуль увеличивается (уменьшается) в  $\lambda$  раз, а направление не изменяется, если  $\lambda > 0$ . Если  $\lambda < 0$ , то направление изменяется на противоположное. В любом случае векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$  лежат на одной прямой (или на параллельных прямых). Такие векторы называют коллинеарными.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору. Коллинеарные векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  связаны соотношением  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ .

Векторы, лежащие в одной плоскости (или в параллельных плоскостях), называют компланарными.

Легко убедиться, что линейные операции удовлетворяют следующим свойствам:

- 1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ,
- 2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ,
- 3)  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ .

Рассмотрим систему векторов

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n. \quad (1)$$

Вектор  $\vec{b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{a}_i$ , где  $\alpha_i$  - числа, называют линейной комбинацией векторов  $\vec{a}_i$ .

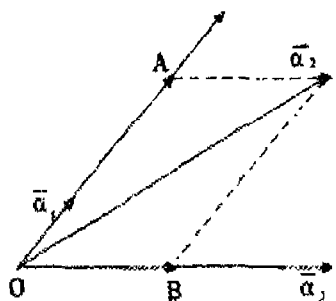
**Опр.** Если существуют числа  $\alpha_i$ , не все равные нулю такие, что линейная комбинация векторов  $\vec{a}_i$  обращается в нуль, то система векторов (1) называется линейно зависимой. Если линейная комбинация обращается в нуль только при  $\alpha_i = 0$ , то - линейно независимой.

Заметим, что если среди векторов системы (1) есть хотя бы один нулевой вектор, то она будет линейно зависимой

Если среди векторов есть хотя бы два линейно зависимых, то и вся система будет линейно зависимой

**Теорема 1.** Три компланарных геометрических вектора линейно зависимы.

**Доказательство.** Будем считать, что векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  лежат в одной плоскости и исходят из одной точки.



Используя правило сложения векторов, получим  $\vec{a}_2 = \overline{OA} + \overline{OB}$

Поскольку векторы  $\overline{OA}$  и  $\overline{OB}$  коллинеарны векторам  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_3$ , то

$\overline{OA} = \lambda_1 \vec{a}_1$   $\overline{OB} = \lambda_2 \vec{a}_3$  Тогда,

$\vec{a}_2 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_3$  или

$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_3 + (-1) \vec{a}_2 = 0$ . Последнее

равенство и означает линейную зависимость векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** Три некомпланарных вектора линейно независимы.

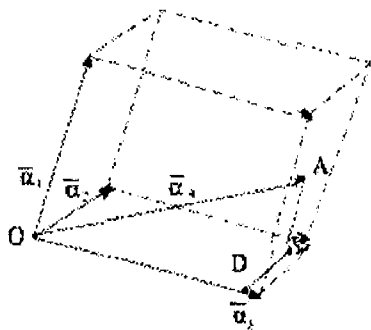
**Доказательство** от противного. Пусть векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  линейно зависимы. Перепишем условие линейной зависимости  $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0$  иначе:

$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \vec{a}_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) \vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_2 + \lambda_2 \vec{a}_3, \alpha_1 \neq 0. \quad (2)$$

Из (2) следует, что все три вектора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  лежат в одной плоскости, т.е. компланарны, что противоречит условию теоремы. Это противоречие и доказывает теорему.

Аналогично можно доказать, что два геометрических вектора линейно зависимы только тогда, когда они коллинеарны.

**Теорема 3.** Любые четыре геометрических вектора линейно зависимы



**Доказательство.** Если хотя бы два из четырех векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$  линейно зависимы, то и все четыре также линейно зависимые.

Поэтому предположим, что  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  линейно независимые, а, следовательно, они не компланарные.

Пусть все векторы исходят из одной точки  $O$ . Проведем через точку  $A$  (конец вектора  $\vec{a}_4$ ) прямую, параллельную вектору  $\vec{a}_1$  до пересечения с плоскостью, в которой лежат векторы  $\vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$ , в точке  $B$ . Через точку  $B$  проведем линию, параллельную вектору  $\vec{a}_2$  до пересечения в точке  $D$ . Тогда согласно правилу сложения векторов имеем

$$\vec{a}_4 = O\vec{D} + D\vec{B} + B\vec{A} = \lambda_3 \vec{a}_3 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_1 \vec{a}_1.$$

Последнее равенство и означает линейную зависимость четырех векторов. Теорема доказана.

Любая упорядоченная некомпланарная (линейно независимая) тройка геометрических векторов  $(\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3)$  называется базисом в пространстве. Векторы  $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$  называются базисными. Если базисные векторы взаимно перпендикулярны, то базис называется ортогональным.

Единичные векторы  $\vec{l}_i^0 = \frac{\vec{l}_i}{|\vec{l}_i|}$  называются ортами. Базис

называется ортонормированным, если базисные векторы единичные и взаимно перпендикулярные.

Совокупность точки и базиса называют декартовой системой координат. Орты прямоугольной декартовой системы координат обычно обозначают  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Пусть  $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3)$  некоторый базис. Присоединим к базисным векторам четвертый вектор  $\bar{a}$ . Поскольку всякая четверка векторов линейно зависима, т.е.

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bar{l}_1 + \alpha_2 \bar{l}_2 + \alpha_3 \bar{l}_3 + \alpha_4 \bar{a} &= 0, \text{ то} \\ \bar{a} &= \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\right) \bar{l}_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\right) \bar{l}_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\right) \bar{l}_3 = \\ &= \lambda_1 \bar{l}_1 + \lambda_2 \bar{l}_2 + \lambda_3 \bar{l}_3, \alpha_4 \neq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Формула (3) дает разложение вектора  $\bar{a}$  по базису  $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3)$ . Коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  называются координатами вектора  $\bar{a}$  в этом базисе.

Можно убедиться, что разложение вектора по базису единственное. Последнее означает, что координаты вектора однозначно определяют сам вектор. Иначе говоря, упорядоченную тройку чисел  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  можно считать вектором в фиксированном базисе.

Очевидно, в множестве компланарных векторов любые два неколлинеарных вектора образуют базис, а всякий третий можно разложить по этому базису. В множестве коллинеарных векторов линейно независимый вектор один, он и образует базис в этом множестве.

**Пример.** Являются ли векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  линейно зависимыми?

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (1, 2, 5) = \bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}, \bar{a}_2 = (1, 3, 2) = \bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}, \\ \bar{a}_3 &= (-2, -7, 1) = -2\bar{i} - 7\bar{j} + \bar{k}. \end{aligned}$$

**Решение.** Составим линейную комбинацию и приравняем ее нулю  $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3 = 0$ , где  $0 = (0, 0, 0)$  — нуль вектор.

Если все  $\alpha_i = 0$ , то система линейно независимая. Используя правила умножения вектора на число, сложение и сравнение векторов, заданных своими координатами, получим следующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 = 0, \\ 5\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что формулы Крамера, полученные нами в §3 для системы двух уравнений, справедливы и для любой линейной системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными. Если определитель системы  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Вычислим определитель нашей системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = 2.$$

Определители  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  — равны нулю, т.к. имеют нулевые столбцы, поэтому система имеет только нулевое решение  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Следовательно данные векторы линейно независимые.

**Упражнение.** Взять данные векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  и  $\vec{a}_3$  за базис и разложить вектор  $\vec{a}_4 = (1, 0, -1)$  по этому базису.

Ответ:  $\vec{a}_4 = 9\vec{a}_1 - 20\vec{a}_2 - 6\vec{a}_3$ .

## **§ 5. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов**

Скалярным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , как известно, называют число, определяемое формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \quad (1)$$

Можно проверить, что скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$1) (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}), 2) (\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}),$$

$$3) (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}),$$

$$4) (\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 > 0, \vec{a} \neq 0.$$

Из (1) также следует, что

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_b \vec{a}. \quad (2)$$

Рассмотрим ортонормированный базис  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Очевидно

$$(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1, (\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0. \quad (3)$$

$$\text{Пусть } \vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}, \vec{y} = y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k}.$$

Используя свойства скалярного произведения и учитывая (3), найдем выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов в ортонормированном базисе.

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \sum_{i=1}^3 x_i y_i. \quad (4)$$

Если  $\vec{x} = \vec{y}$ , то из (4) найдем, что

$$(\vec{x}, \vec{x}) = |\vec{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, |\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

**Пример 1.** Вычислить работу силы  $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  при перемещении материальной точки из пункта  $A(1,10)$  в пункт  $B(2,-3,5)$ .

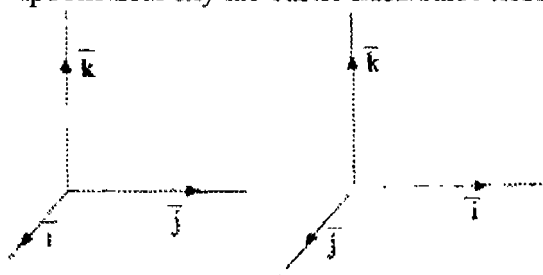
**Решение.** Работа  $A = |\vec{F}| \cdot |\overline{AB}| \cos(\vec{F}, \overline{AB}) = (\vec{F}, \overline{AB})$ .

Поскольку

$$\overline{AB} = (1, -4, 5), \text{ то } A = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) + 1 \cdot 5 = 19.$$

Базис  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  называют правым, если поворот первого вектора ко второму на наименьший угол между ними со

стороны третьего кажется против стрелки часов. В противном случае базис называют левым.



На первом рисунке базис  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  правый, а на втором левый. В дальнейшем будем пользоваться правым базисом.

**Опр.1.** Векторным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называют третий вектор  $\vec{c}$ , удовлетворяющий следующим требованиям:

- 1) вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
- 2) тройка векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  правая;
- 3) модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах, т.е.  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ .

Обозначают векторное произведение так  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$ .

Рассмотрим ортонормированный базис  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Согласно определению векторного произведения найдем:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}. \quad (1)$$

Отметим следующие свойства векторного произведения.

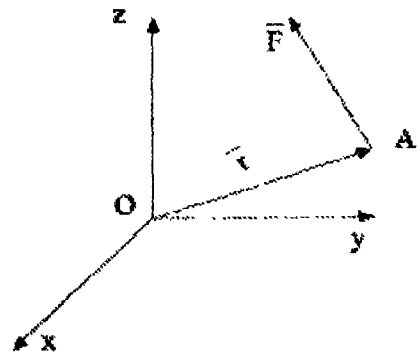
- 1)  $[\vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{y}, \vec{x}]$ ,
- 2)  $[\lambda\vec{x}, \vec{y}] = [\vec{x}, \lambda\vec{y}] = \lambda[\vec{x}, \vec{y}]$ ,
- 3)  $[\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}] = [\vec{x}, \vec{z}] + [\vec{y}, \vec{z}]$ , 4)  $[\vec{x}, \vec{x}] = 0$ .

Используя свойства векторного произведения и соотношения (1), найдем векторное произведение двух



векторов  $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ ,  $\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$ , заданных в ортогональном базисе своими координатами.

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} - (x_1y_3 - x_3y_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} = \\ &= \vec{i} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$



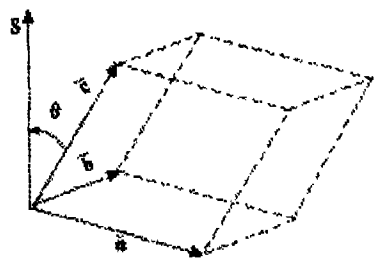
**Пример 2.** Найти момент силы  $\vec{F} = -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ , приложенной в точке  $A(-1, 2, 3)$ , относительно начала координат.

**Решение.**

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 13\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}.$$

**Опр.2.** Смешанным произведением трех векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называют число, равнос  $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ .



Рассмотрим геометрический смысл смешанного произведения. Векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  выберем в качестве ребер и построим параллелепипед.

Пусть  $\vec{S} = \vec{a} \times \vec{b}$ , тогда  $|\vec{S}| = S_{осн}$  - площадь основания параллелепипеда, а смешанное произведение

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{S}, \vec{c}) = |\vec{S}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\theta = |\vec{S}| \cdot (\pm H) = \pm V.$$

Здесь  $H$  - высота параллелепипеда, а  $V$  - его объем.

Таким образом, смешанное произведение только знаком может отличаться от объема параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах как на ребрах. Если тройка  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  правая, то знак смешанного произведения будет положительным.

Из геометрического смысла смешанного произведения ясно, что векторно можно перемножать любые два из трех векторов, от этого может измениться только знак. Легко проверить, что тройки векторов  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ,  $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$  и  $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$  одинаковой ориентации, так что  $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c} \times \vec{a}, \vec{b})$ . Поэтому смешанное произведение обозначают  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ , не указывая, какие векторы перемножаются векторно.

Выразим смешанное произведение через координаты перемножаемых векторов в ортонормированной системе координат.

Пусть  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$

Поскольку  $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{i} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ , то

$$\begin{aligned}
 (\vec{x} \times \vec{y}, \vec{z}) &= z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{3}
 \end{aligned}$$

**Теорема.** Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Доказательство ясно из геометрической интерпретации смешанного произведения.

**Следствие.** Три вектора  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  линейно независимы только в том случае, если их смешанное произведение отлично от нуля.

Доказательство очевидно.

**Пример 3.** Проверить линейную независимость векторов  $\bar{a}_1 = (1, 2, 5), \bar{a}_2 = (1, 3, 2), \bar{a}_3 = (-2, -7, 1)$  (см. пример §4).

**Решение.** Найдем их смешанное произведение

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \text{ Данные векторы, согласно}$$

следствию, линейно независимые.

Обобщим понятие вектора. Назовем вектором упорядоченную совокупность  $n$  действительных чисел, т.е.

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор,  $x_i$  – его координаты.

При сложении векторов их соответствующие координаты будем складывать, а при умножении на число – умножать на это число.

Множество всех таких векторов с определенными выше операциями называют арифметическим пространством и обозначают  $R_n$ . Обычное пространство геометрических векторов обозначают  $R_3$ , множество компланарных геометрических векторов –  $R_2$ , коллинеарных –  $R_1$ .

Зафиксировав в пространстве  $R_n$  ортонормированный базис  $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ , понятия скалярного, векторного и смешанного произведений можно обобщить и на векторы этого пространства  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i), i = 1, 2, \dots, n$ .

Скалярным произведением двух векторов  $x^1$  и  $x^2$  пространства  $R_n$  назовем число, определяемое следующей

$$\text{формулой } (x^1, x^2) = \sum_{k=1}^n x_k^1 x_k^2. \quad (4)$$

Векторным произведением  $(n-1)$  вектора пространства  $R_n$  назовем вектор  $S$  этого же пространства, определяемый следующей формулой (5).

$$S = \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_n \\ x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

$$V = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}. \quad (6)$$

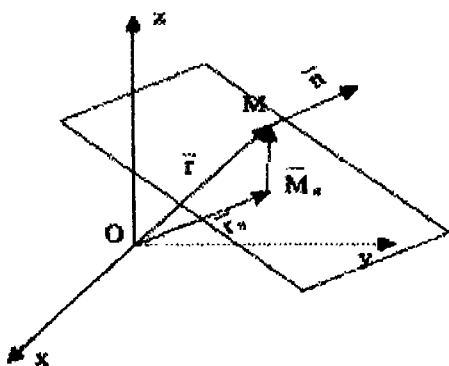
Смешанным произведением  $n$  векторов пространства  $R_n$  назовем число  $V$ , определяемое формулой (6).

**Упражнение.** Убедиться, что скалярное, векторное и смешанное произведения геометрических векторов  $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ,  $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)$ , заданных своими координатами в некотором не ортогональном базисе  $(\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2, \bar{\ell}_3)$ , имеют вид:  $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i,k=1}^3 x_i y_k (\bar{\ell}_i, \bar{\ell}_k)$ ,

$$\bar{x} \times \bar{y} = \begin{vmatrix} \bar{\ell}_2 \times \bar{\ell}_3 & \bar{\ell}_3 \times \bar{\ell}_1 & \bar{\ell}_1 \times \bar{\ell}_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot (\bar{\ell}_1 \times \bar{\ell}_2, \bar{\ell}_3).$$

## § 6. Уравнения плоскости



Рассмотрим ортонормированный базис в пространстве и найдем уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (A, B, C)$ . Вектор  $\vec{n}$  называют нормалью (вектором нормали).

Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная (текущая) точка плоскости. Тогда вектор  $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  перпендикулярен вектору  $\vec{n}$ , следовательно, их скалярное произведение равно нулю

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) и есть уравнение искомой плоскости в векторном виде. Перепишем его в скалярном виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (2)$$

$$\text{или } Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3)$$

где  $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ .

Уравнение (3) называют общим уравнением плоскости.

Если нормаль единичная, т.е.  $|\vec{n}| = 1$ ,  $\vec{n} = \vec{n}^0 =$

$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , то уравнение плоскости называют нормальным. Из (1) получим

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \rho = 0, \quad (4)$$

где  $\rho = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma$ .

Выясним геометрический смысл величин, входящих в нормальное уравнение плоскости (4). Углы  $\alpha, \beta, \gamma$  — это углы между осями  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  и нормалью  $\vec{n}^0$ , направленной от

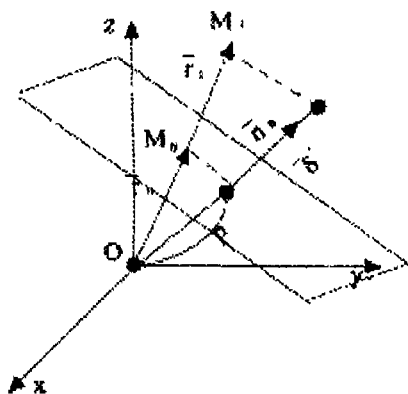
начала координат к плоскости,  $\rho = (\vec{r}_0, \vec{n}^0) = |\vec{r}_0| \cdot \cos(\widehat{\vec{r}_0, \vec{n}^0})$  – расстояние от начала координат до плоскости.

Пусть  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  – произвольная точка, не лежащая в плоскости.

Из рисунка видно, что

$$(\vec{r}_1, \vec{n}^0) = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma = \rho + \delta$$

$$\text{или} \quad \delta = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - \rho \quad (5)$$



Величину  $\delta$  называют отклонением точки  $M_1$  от плоскости. Отклонение  $\delta$  может отличаться от расстояния точки  $M_1$  от плоскости только знаком. Из (5) видно, чтобы найти отклонение точки  $M_1$  от плоскости, достаточно в нормальном уравнении плоскости заменить

текущие координаты на координаты точки  $M_1$ .

**Пример.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(1,2,3)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (3, -5, 1)$ .

Найти расстояние точки  $M_1(0, -2, 4)$  от искомой плоскости

**Решение.** Воспользуемся уравнением (2). Получим

$$3x - 5y + z + 4 = 0, \quad (6)$$

искомое уравнение плоскости. Запишем его в нормальном виде. Чтобы записать общее уравнение плоскости (3) в нормальном виде, достаточно умножить его на

нормирующий множитель  $\mu = -\frac{\text{sgn } D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ , где  $D \neq 0$ .

Поскольку в нашем случае  $D = 4 > 0$ , то  $\mu = -\frac{1}{\sqrt{35}}$ .

Умножая уравнение (6) на  $\mu = -\frac{1}{\sqrt{35}}$ , получим нормальное уравнение плоскости

$$-\frac{3}{\sqrt{35}}x + \frac{5}{\sqrt{35}}y - \frac{1}{\sqrt{35}}z - \frac{4}{\sqrt{35}} = 0. \quad (7)$$

Отклонение найдем по формуле (5).

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{35}}(-5 \cdot 2 - 4 - 4) = -\frac{18}{\sqrt{35}}. \text{ Расстояние точки } M_1 \text{ от}$$

плоскости очевидно равно  $\frac{18}{\sqrt{35}}$ .

Пусть в общем уравнении (3) все коэффициенты  $A, B, C$  и  $D$  отличны от нуля. Тогда его можно переписать в виде

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1 \text{ или } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (8)$$

Уравнение (8) называют уравнением плоскости в отрезках. Легко убедиться, что  $a, b, c$  — это отрезки на осях координат, отсекаемые плоскостью (убедиться в этом самостоятельно).

Запишем уравнение плоскости, проходящей через три точки  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ . Выберем произвольную точку  $M(x, y, z)$  на плоскости. Тогда векторы  $\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$  будут лежать в этой плоскости. Следовательно, их смешанное произведение равно нулю, т.е.

$$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0$$

или 
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) и есть искомое уравнение  
Рассмотрим угол между двумя плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (10)$$

Т.к. угол между нормальными  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ,  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  и линейный угол двугранного угла между плоскостями равны, то очевидно  $\cos\theta = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ , (11)

где  $\theta$  – угол между плоскостями.

Из (11) следует условие перпендикулярности двух плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (12)$$

Если плоскости параллельны, то нормали  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  коллинеарны, следовательно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (13)$$

Равенство (13) выражает условие параллельности плоскостей.

Запишем теперь уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  параллельно двум неколлинеарным векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Пусть  $M(x, y, z)$  произвольная точка плоскости. Тогда векторы  $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  компланарны, следовательно, линейно зависимые, т.е.

$$\begin{aligned} \overline{M_0M} &= t_1\vec{a} + t_2\vec{b} && \text{или} \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + t_1\vec{a} + t_2\vec{b}. \end{aligned} \quad (14)$$

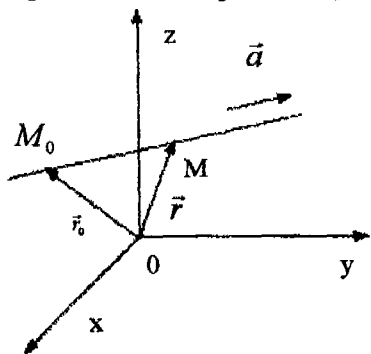
Здесь  $t_1, t_2$  некоторые параметры, а уравнение (14) называется векторным параметрическим уравнением плоскости.

## **§ 7. Уравнения прямой в пространстве и на плоскости**

Всякий вектор, лежащий на прямой или на прямой, параллельной данной прямой, называется направляющим



вектором данной прямой. Запишем уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и имеющей



направляющий вектор  $\vec{a} = (l, m, n)$ .

Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка этой прямой. Тогда векторы  $\overline{M_0M}$  и  $\vec{a}$  коллинеарны, т.е.  $\overline{M_0M} = t\vec{a}$ , где  $t$  — некоторый параметр. Т.к.

$$\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0, \text{ то}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}. \quad (1)$$

Уравнение (1) называют векторным параметрическим уравнением прямой (сравним с (14) §6). Поскольку  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , то из (1) получим параметрические уравнения прямой

$$x = x_0 + tl, \quad y = y_0 + tm, \quad z = z_0 + tn. \quad (2)$$

Из (2) получим

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t. \quad (3)$$

Уравнения (3) называют каноническими уравнениями прямой.

**Пример.** Записать уравнение прямой, проходящей через две данные точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ .

**Решение.** Вектор  $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$  возьмем в качестве направляющего. Тогда

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (4)$$

Уравнения (4) — искомые уравнения.

Две плоскости пересекаются по прямой, поэтому система двух уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

определяет прямую в пространстве. Перейдем от уравнений (5) к каноническим уравнениям прямой.

Поскольку нормали  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  и  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  перпендикулярны соответствующим плоскостям, то вектор  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  коллинеарен их линии пересечения. Тогда вектор  $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  можно взять за направляющий вектор прямой.

Раскрывая векторное произведение  $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ , получим координаты направляющего вектора

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Если  $(x_0, y_0, z_0)$  – некоторое решение системы (5), то параметрические уравнения прямой совпадут с (2),  $l, m, n$  определяются формулами (6).

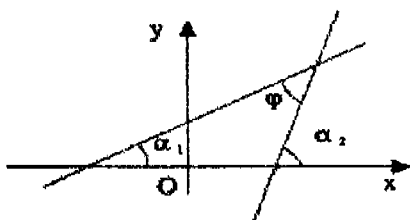
Рассмотрим теперь уравнение прямой в плоскости  $xOy$ , т.е. в плоскости  $z = 0$ . В этом случае уравнение (5) перепишем в

$$\text{виде } \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Если заранее оговорить условие, что прямая лежит в плоскости  $z = 0$ , то второе уравнение в (7) можно опустить. В результате получим уравнение  $A_1x + B_1y + D_1 = 0$ . (8)

Уравнение (8) называют общим уравнением прямой на плоскости  $xOy$ . Если  $B_1 \neq 0$ , то из (8) получим

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{D_1}{B_1} = kx + b \quad (9)$$



Уравнение (9) называют уравнением прямой с угловым коэффициентом  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между прямой и осью  $Ox$ .

Найдем угол между двумя

прямыми  $y = k_1x + b_1$ ,  $y = k_2x + b_2$ .

Поскольку  $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$ , то  $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ ,

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \quad (10)$$

Из равенства (10) можно получить условие параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости:

$$k_1 = k_2, \quad k_1 = -\frac{1}{k_2}. \quad (11)$$

Нормальное уравнение прямой и уравнение в отрезках на плоскости получаются из соответствующих уравнений плоскости при  $z = 0$ . Отклонение точки  $M_1(x_1, y_1)$  от прямой также получается из соответствующей формулы для плоскости при  $z = 0$ .

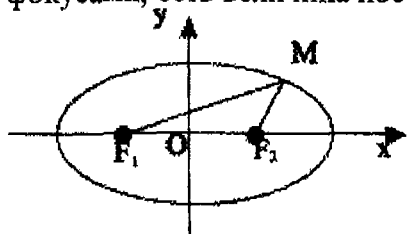
## § 8. Плоские кривые второго порядка

В предыдущем параграфе мы убедились, что прямая на плоскости в декартовой системе координат имеет уравнение первой степени. Справедливо и обратное утверждение — всякое уравнение первой степени геометрически представляет собой прямую линию.

Плоские кривые, которые задаются алгебраическими уравнениями второй степени, называются кривыми второго порядка. Это — эллипс, гипербола, парабола.

**Опр.1.** Эллипсом называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух

фиксированных точек плоскости  $F_1$  и  $F_2$ , называемых фокусами, есть величина постоянная.



Найдем уравнение эллипса. Прямую, на которой лежат фокусы, примем за ось  $x$ . Ось  $y$  проведем через середину отрезка  $F_1F_2$  перпендикулярно ему.

Положим  $|F_1F_2| = 2c$ , тогда фокусы будут иметь следующие координаты  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ . Если  $M(x, y)$  — произвольная точка эллипса, тогда согласно определению,

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a, \quad (1)$$

где  $a > 0$  — некоторый параметр. Т.к. сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей, то  $a > c$ . Поскольку  $\overline{F_1M} = (x+c, y)$ ,  $\overline{F_2M} = (x-c, y)$ , то подставляя эти векторы в уравнение (1), получим искомое уравнение эллипса

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (2)$$

Упростим уравнение (2). Уединяя первый корень и возвышая обе части уравнения в квадрат, получим

$$x \cdot c = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

После повторного уединения корня и возведения в квадрат

найдем, что 
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (3)$$

Поскольку  $a > c$ , то введем обозначение  $a^2 - c^2 = b^2$ .

С учетом этого, уравнение (3) примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4)$$

Уравнение (4) называется каноническим уравнением эллипса.

Замечание. Возведение в квадрат, вообще говоря, нарушает равносильность уравнения. Могут появиться лишние корни, т.е. точки не принадлежащие эллипсу. Однако, в данном случае уравнения (2) и (4) равносильны.

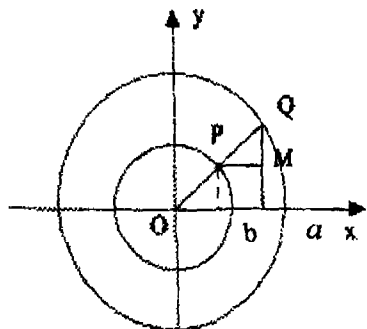
Рассмотрим некоторые свойства эллипса. Пусть точка  $M_1(x, y)$  принадлежит эллипсу, тогда точка  $M_2(-x, y)$  также принадлежит эллипсу в силу четности уравнения (4) по переменной  $x$ . А это означает, что ось  $oy$  является осью симметрии. Аналогично можно убедиться, что ось  $Ox$  является осью симметрии эллипса. Точка пересечения осей симметрии является центром симметрии. Поэтому эллипс называется центральной кривой второго порядка.

Из (4) найдем  $y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ , откуда следует, что  $|x| \leq a$ .

Аналогично найдем, что  $|y| \leq b$ . Таким образом, эллипс целиком расположен в прямоугольнике со сторонами  $2a$  и  $2b$ . Величины  $a$  и  $b$  называют полуосями эллипса. Та полуось, на которой расположены фокусы, называется большой, а другая – малой. Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (5)$$

называется эксцентриситетом эллипса. Если  $a = b$ , то эллипс превращается в окружность, а эксцентриситет обращается в нуль. Если малая полуось  $b$  уменьшается до нуля, то эксцентриситет увеличивается до единицы. Таким образом, эксцентриситет показывает степень сплюсченности эллипса.



Найдем параметрические уравнения эллипса. Возьмем две concentric окружности с радиусами  $b$  и  $a$ . Под углом  $t$  к оси  $Ox$  проведем луч. Из точек пересечения луча с окружностями  $P$  и  $Q$  проведем линии, параллельные осям координат до пересечения в точке  $M(x, y)$ . Убедимся, что точка  $M(x, y)$  принадлежит эллипсу (4). Действительно, из рисунка видно, что

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \\ 0 &\leq t \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (6)$$

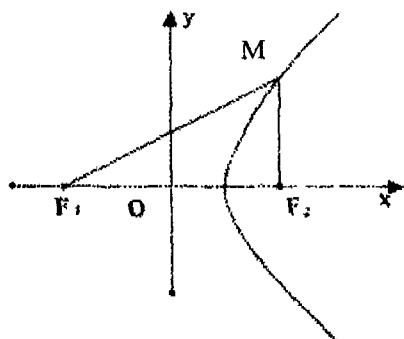
Подставив значения  $x$  и  $y$  из (6) в (4), убедимся, что они обращают (4) в тождество. Следовательно, точка  $M(x, y)$  лежит на эллипсе.

Уравнения (6) – параметрические уравнения эллипса.

В частности, при  $a = b = R$ , из (6) получаются параметрические уравнения окружности

$$\begin{aligned} x &= R \cos t, \\ y &= R \sin t, \\ 0 &\leq t \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (7)$$

**Опр.2.** Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости  $F_1$  и  $F_2$ , называемых фокусами, есть величина постоянная.



Если точка  $M(x, y)$  лежит на гиперболе, то согласно определению

$$\left| |F_1M| - |F_2M| \right| = 2a \quad (8)$$

где  $a \geq 0$  – некоторый параметр.

Систему координат выберем так же, как в предыдущем

случае. Тогда из равенства (8) получим

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (9)$$

Уравнение (9) и есть уравнение гиперболы.

После освобождения от иррациональности уравнение (9) примет вид

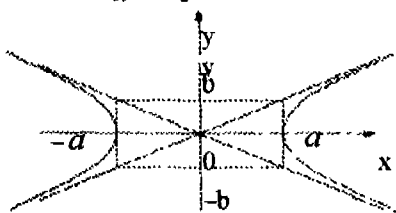
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Здесь  $c$  – полурасстояние между фокусами.

Поскольку разность двух сторон треугольника всегда меньше третьей, то  $a < c$ . Поэтому обозначим  $c^2 - a^2 = b^2$ .

С учётом этого обозначения уравнение гиперболы примет канонический вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (10)$$



Аналогично предыдущему случаю убедимся, что гипербола является центральной кривой второго порядка.

Из уравнения (10) найдем

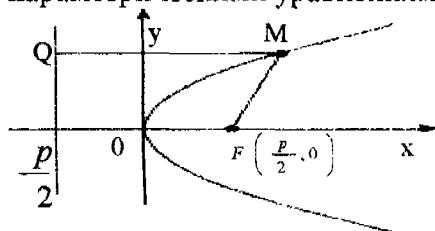
$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}. \quad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что  $|x| \geq a$ , т.е. гипербола расположена вне полосы  $-a \leq x \leq a$ . Гипербола (10) пересекает ось  $Ox$  в точках  $x = \pm a$  и не пересекает ось  $Oy$ . Величина  $a$  называется полуосью гиперболы, а величина  $b$  – мнимой полуосью гиперболы.

Линии  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , лежащие на диагоналях прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$ , называются асимптотами гиперболы. Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

**Упражнение.** Убедиться, что уравнения  $x = a \operatorname{ch} t$ ,  $y = b \operatorname{sh} t$ , где  $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ ,  $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ ,  $-\infty < t < \infty$ , являются параметрическими уравнениями гиперболы.



**Опр.3.** Параболой называется множество точек плоскости равноудаленных от точки  $F$ , называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой.

Проведем ось  $ox$  через фокус  $F$  перпендикулярно директрисе, а ось  $oy$  – через середину отрезка  $p$  между фокусом и директрисой. Согласно определению

$$|\overline{FM}| = |\overline{QM}|. \quad (12)$$

Поскольку  $\overline{FM} = (x - \frac{p}{2}, y)$ ,  $\overline{QM} = (x + \frac{p}{2}, 0)$ , то уравнение

$$(12) \text{ примет вид } \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (13)$$



Уравнение (13) и есть уравнение параболы. После упрощения оно примет канонический вид

$$y^2 = 2px. \quad (14)$$

Легко убедиться, что парабола имеет только одну ось симметрии, поэтому она не является центральной кривой второго порядка.

Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы просты по форме из-за удачного выбора системы координат. Если, например, оси симметрии эллипса параллельны осям координат, но центр симметрии лежит в точке  $(x_0, y_0)$ , т.е. не совпадает с началом координат, то уравнение эллипса усложнится и будет следующим

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Если оси симметрии не будут параллельны осям координат, то уравнение эллипса еще более усложнится, в нем появится слагаемое, содержащее произведение  $x \cdot y$ .

Запишем общее уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + b_1x + b_2y + c = 0. \quad (15)$$

Это уравнение состоит из квадратичной формы  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$ , линейной формы  $b_1x + b_2y$  и свободного члена  $c$ .

**Теорема.** Уравнение (15) геометрически представляет собой либо эллипс, либо гиперболу, либо параболу и ничего больше, если не считать вырожденные случаи (без доказательства).

Перечислим вырожденные случаи:  $x^2 + y^2 = -1$  - пустое множество;  $x^2 + y^2 = 0$  - одна точка  $(0,0)$ ;  $x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y) = 0$  - пара пересекающихся прямых.

## § 9. Поверхности второго порядка

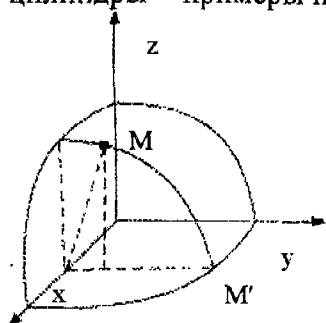
Если уравнение  $f(x, y) = 0$  в плоскости  $z = 0$  задает некоторую кривую, то это же уравнение в пространстве является цилиндрической поверхностью. Например,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — эллиптический цилиндр,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — гиперболический цилиндр, а}$$

$$y^2 = 2px \text{ — параболический цилиндр.}$$

Образующая всех этих цилиндров параллельна оси  $Oz$ . Эти цилиндры — примеры поверхностей второго порядка.



Пусть  $F(X, Y) = 0$  — некоторая кривая в плоскости  $z = 0$ . Будем вращать эту кривую вокруг оси  $ox$ . В результате получим поверхность вращения. Найдем уравнение поверхности вращения.

Пусть точка  $M'(X, Y, 0)$  — произвольная точка на кривой.

При вращении она опишет

окружность радиуса  $R = |Y|$ . Если точка  $M(x, y, z)$  — произвольная точка на этой окружности, то

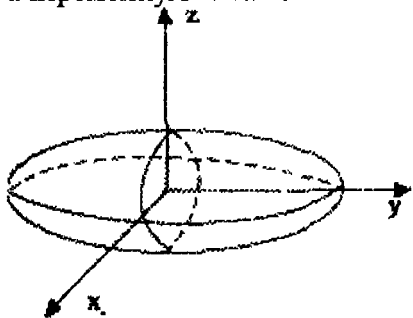
$X = x, |Y| = \sqrt{y^2 + z^2}, Y = \pm \sqrt{y^2 + z^2}$ . Подставляя в уравнение  $F(X, Y) = 0$  найденные значения  $X$  и  $Y$ ,

получим уравнение поверхности вращения

$$F(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0. \quad (1)$$

Замечание. Если кривую вращать вокруг оси  $oy$ , то чтобы получить уравнение поверхности вращения, следует в

уравнении кривой переменную  $y$  оставить без изменения, а переменную  $x$  заменить на  $\pm\sqrt{x^2+z^2}$



В результате получим

$$F(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0. \quad (1')$$

Рассмотрим несколько примеров поверхностей вращения и обобщим их.

1. Будем вращать эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ вокруг оси } Oy.$$

Согласно формуле (1') получим следующее уравнение поверхности вращения

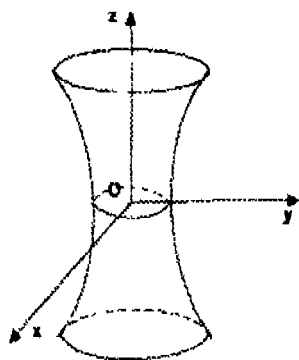
$$\frac{x^2+z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (2)$$

Поверхность (2) называется эллипсоидом вращения,  $a, b, a$  - полуоси эллипсоида вращения. Обобщая уравнение (2), получим уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3)$$

Все его полуоси  $a, b, c$  разные.

При  $a = b = c = R$  из (3) получим уравнение сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .



Если рассекать эллипсоид плоскостями, параллельными координатным плоскостям, то все сечения будут эллипсами.

2. Будем вращать гиперболу

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ вокруг оси } oz. \text{ Согласно}$$

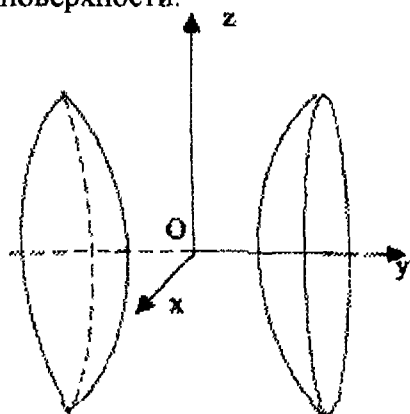
(1) получим

$$\frac{y^2 + x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4)$$

Поверхность, описываемая уравнением (4) называется однополостным гиперboloидом вращения. Обобщая (4), получим уравнение однополостного эллиптического гиперboloида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5)$$

Сечения плоскостями перпендикулярными оси  $oz$  являются эллипсами, а сечения плоскостями перпендикулярными осям  $ox$  и  $oy$  являются гиперболами, отсюда и название поверхности.



3. Будем вращать ту же гиперболу

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ вокруг оси } oy.$$

Тогда получим

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2 + x^2}{c^2} = 1 \text{ или}$$

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (6)$$

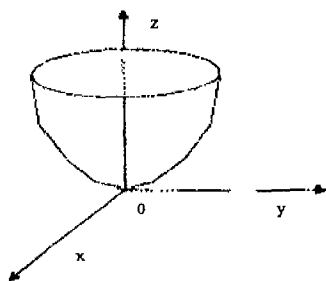
уравнение двуполостного

гиперboloида вращения.

Обобщая (6), получим уравнение двуполостного эллиптического гиперboloида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (7)$$

Сечения плоскостями перпендикулярными оси  $oy$  являются эллипсами, а плоскостями перпендикулярными осям  $ox$  и  $oz$  - гиперболами.



4. Будем вращать параболу  $2pz = y^2$  вокруг оси  $oz$ . Получим уравнение поверхности

$$2pz = x^2 + y^2, \quad (8)$$

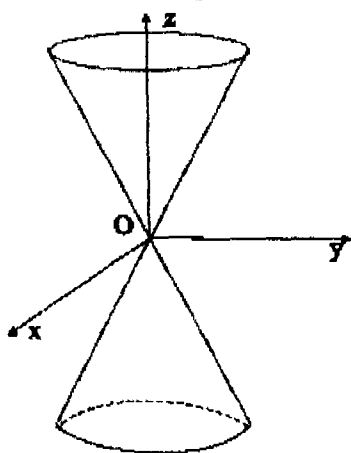
которая называется параболоидом вращения.

Обобщая уравнение (8), получим

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (9)$$

Поверхность, описываемая уравнением (9), называется эллиптическим параболоидом. В сечениях — эллипсы и параболы.

5. Наконец, вращая прямую  $z = ky$  вокруг оси  $oz$ , получим



коническую поверхность

$$z = \pm k\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{или}$$

$$z^2 = \frac{x^2}{k^{-2}} + \frac{y^2}{k^{-2}}. \quad (10)$$

В общем случае уравнение

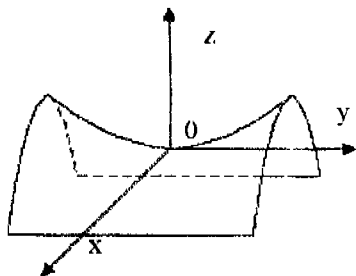
$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (11)$$

есть каноническое уравнение эллиптической конической поверхности. Ее сечения —

эллипсы и гиперболы.

6. Рассмотрим уравнение

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (12)$$



(сравним с уравнением (9)).  
 Ни при каких значениях параметров  $a$  и  $b$  поверхность (12) не будет поверхностью вращения. Она называется гиперболическим параболоидом. Ее сечения – гиперболы и параболы.

Рассмотрим общее уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0. \quad (13)$$

Оно состоит из квадратичной формы, линейной формы и свободного члена.

**Теорема.** Уравнение (13) геометрически представляет собой либо эллипсоид, либо гиперболоид, либо конус, либо параболоид, либо цилиндр и ничего больше, если не считать вырожденных случаев (без доказательства).

Выражение вида  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) называют

квадратичной формой  $n$ -го порядка. Так что в уравнении (15) §8 квадратичная форма второго порядка, а в уравнении (13) – третьего.

## § 10. Действия над матрицами.

### Обратная матрица

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой. Элементы  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  квадратной матрицы составляют главную диагональ этой матрицы, а элементы  $a_{n1}, a_{n-12}, \dots, a_{1n}$  – ее побочную диагональ. Если все элементы квадратной матрицы вне главной диагонали равны нулю, то такую матрицу называют диагональной. А если у диагональной матрицы все диагональные элементы равны

единице, то такая матрица называется единичной и обозначается  $E = (\delta_{ij})$ , где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера. Если все элементы квадратной матрицы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, то матрица называется треугольной.

Две матрицы считаются равными, если они имеют одинаковые размеры и все их соответствующие элементы совпадают, т.е.  $A_{m \times n} = B_{m \times n}$ , если  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Рассмотрим некоторые операции над матрицами.

**1. Сложение.** Суммой двух матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  называют третью матрицу  $C = (c_{ij})$ , элементы которой получаются по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (1)$$

Пишут  $C = A + B$ . Очевидно, сложить можно только матрицы одинакового размера.

**2. Умножение на число.** Произведением матрицы  $A = (a_{ij})$  на число  $\lambda$  называется матрица  $B = (b_{ij})$ , элементы которой получаются по формуле

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}. \quad (2)$$

Пишут  $B = \lambda A$ .

Замечание. Под разностью матриц  $A$  и  $B$  понимают матрицу  $C = A - B = A + (-1) \cdot B$ .

**3. Умножение матриц.** Произведением матрицы  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  на матрицу  $B = (b_{ij})_{n \times p}$  называется матрица  $C = (c_{ij})_{m \times p}$ , элементы которой получаются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \quad (3)$$

Пишут  $C = A \cdot B$ .

Как видно из (3), перемножить две матрицы можно только в том случае, если число столбцов первого сомножителя

равно числу строк второго. Поэтому, если  $A \cdot B$  имеет смысл, то  $B \cdot A$  может его не иметь. Если  $A$  и  $B$  - квадратные матрицы одинаковой размерности, то имеют смысл и  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$ .

Легко проверить, что введенные операции удовлетворяют следующим свойствам.

- 1)  $A + B = B + A$ ,
- 2)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,
- 3)  $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$ ,
- 4)  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ ,
- 5)  $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ ,
- 6)  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ ,
- 7)  $(A + B) \cdot \alpha = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ ,
- 8)  $A + 0 = A$ ,  $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$ ,  $A \cdot E = E \cdot A = A$

Здесь  $\alpha, \beta$  - числа,  $0$  - нулевая матрица,  $E$  - единичная матрица.

**Пример 1.** Найти произведение матриц  $A$  и  $B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Решение.** Воспользуемся формулой (3), получим

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 & 17 \\ -7 & 3 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Произведение  $B \cdot A$  невозможно.

**Пример 2.** Найти произведение матриц  $A$  и  $B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



**Решение.** Согласно формуле (3) получим

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из примера ясно, что, во-первых, произведение ненулевых матриц может дать нулевую, во-вторых,  $A \cdot B \neq B \cdot A$  в общем случае. Если  $A \cdot B = B \cdot A$ , то матрицы называются перестановочными.

Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля.

**Опр.** Квадратные матрицы  $A$  и  $B$  порядка  $n$  называются взаимно обратными, если  $A \cdot B = B \cdot A = E$ , где  $E$  — единичная матрица порядка  $n$ .

Обратную матрицу к  $A$  обозначают  $A^{-1}$ .

**Теорема.** Всякая невырожденная матрица  $A$  имеет обратную  $B = A^{-1}$ , элементы которой определяются формулой  $b_{kj} = \frac{A_{jk}}{\det A}$ , где  $A_{jk}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{jk}$  матрицы  $A$ .

**Доказательство.** чтобы доказать теорему, достаточно убедиться, что выполняются условия  $A \cdot B = B \cdot A = E$ . Пусть  $C = A \cdot B$ . Согласно правилу умножения матриц, найдем

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \frac{1}{\det A} \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \det A, & i = j \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

(Воспользовались свойством 5 определителя, см. §3). Т.к. матрица с элементами  $\delta_{ij}$  является единичной,  $(\delta_{ij}) = E$ , то первая часть теоремы доказана, т.е.  $A \cdot B = E$ . Аналогично можно убедиться, что  $B \cdot A = E$ . Теорема доказана.



Введем матрицу  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , которая

называется матрицей системы (1), матрицу-столбец неизвестных  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  и матрицу свободных членов  $H = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T$ . С помощью этих матриц систему (1) можно записать в матричном виде

$$AX = H. \quad (1')$$

Пусть, в частности,  $m = n$ , тогда матрица системы (1) квадратная. Если она невырожденная, т.е.  $\det A \neq 0$ , то имеет обратную  $A^{-1}$ . Умножим (1') слева на  $A^{-1}$ , получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}H, EX = A^{-1}H, X = A^{-1}H. \quad (2)$$

Формула (2) дает решение системы. Этот метод называют матричным.

**Пример 1.** Решить систему матричным способом.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

**Решение.** Запишем систему в матричном виде  $AX = H$ . Здесь матрица системы  $A$  совпадает с матрицей пр.3 §10, матрица неизвестных -  $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ , а матрица свободных членов -  $H = (4 \ 1 \ 8)^T$ .

Поскольку обратная матрица найдена в пр.3 §10, то воспользуемся формулой (2).

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 33 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решением системы является вектор  $X = (1, 1, 1)$ .

Матричный метод решения системы и метод Крамера, рассмотренный ранее (см. §§3,4), применимы только в частном случае, когда число уравнений  $m$  равно числу неизвестных  $n$ , и определитель матрицы системы отличен от нуля. Система в этом случае имеет единственное решение. В общем случае система (1) может иметь бесконечное множество решений или может не иметь ни одного решения. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. В противном случае – несовместной.

Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных) – это универсальный метод. Он применим к любой СЛАУ, совместной или несовместной.

Рассмотрим вкратце этот метод.

Считая  $a_{11} \neq 0$ , разделим первое уравнение системы (1) на  $a_{11}$ . В результате получим

$$x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = h_1', \quad (3)$$

$$\text{где } b_{1i} = \frac{a_{1i}}{a_{11}}, \quad h_1' = \frac{h}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Умножая уравнение (3) последовательно на  $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{m1}$  и вычитая этот результат последовательно из второго, третьего и т.д.  $m$ -го уравнений, мы исключим из последующих уравнений неизвестное  $x_1$ .

Получим следующую систему

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n = h_1', \\ \phantom{x_1} b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n = h_2', \\ \phantom{x_1} \dots \dots \dots \phantom{x_1} \\ \phantom{x_1} b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n = h_m'. \end{array} \right. \quad (4)$$

Аналогично в системе (4) исключим неизвестное  $x_2$  из третьего и последующих уравнений. Затем также поступим с неизвестным  $x_3$  и т.д.

В результате получим простейшую систему равносильную данной, которую легко решить или убедиться, что она противоречива, т.е. не имеет решения. Указанные операции удобнее производить не над уравнениями, а над строками расширенной матрицы системы, которая получается, если к матрице системы дописать столбец свободных членов.

Рассмотрим метод Гаусса на примере

**Пример 2.** Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10 \end{cases}$$

**Решение.** Выпишем расширенную матрицу  $A'$  системы и путем элементарных преобразований (перемени местами матрицы, умножения всех элементов строки на некоторое число и сложения результатов с соответствующими элементами другой строки) добьемся, чтобы в первом столбце все элементы, кроме  $a_{11}$ , стали нулевыми. Затем аналогично поступим со вторым столбцом и т.д.

$$A' = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{array} \right) \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & +1 & -5 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Знак  $\approx$  означает эквивалентность матриц (равносильность систем). Последней матрице отвечает система:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases} \quad \text{или} \\ \begin{cases} -x_3 + 3x_4 = 1 - 2x_1 + x_2, \\ x_3 - 5x_4 = 3. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) равносильна данной. Неизвестные  $x_3$  и  $x_4$  назовем главными, а  $x_1$  и  $x_2$  — свободными. Решая (5), получим  $x_3 = 5x_1 - 2,5x_2 - 7$ ,  $x_4 = x_1 - 0,5x_2 - 2$ .

Придавая свободным неизвестным любые значения, получим бесконечное множество решений системы (5), следовательно, и данной системы.

## § 12. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре

Рассмотрим матрицу  $A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

**Опр.1.** Минором  $k$ -го порядка матрицы  $A$  называют определитель, составленный из элементов этой матрицы, расположенных на пересечении любых ее  $k$  столбцов и  $k$  строк. Очевидно  $k \leq \min(m, n)$

Например,  $a_{11}$  – минор первого порядка,  $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$  – минор

второго порядка матрицы  $A$ . Если у матрицы  $A$  все миноры порядка  $k > r$  равны нулю, а среди миноров порядка  $r$  есть хотя бы один отличный от нуля, то число  $r$  называют рангом матрицы  $A$ . Пишут  $\text{rang} A = \text{Rg} A = r$ .

Очевидно, ранг невырожденной матрицы совпадает с ее размером. В частности ранг треугольной матрицы, на главной диагонали которой нет нулевых элементов, совпадает с ее размером. Ранг ступенчатой матрицы (например, последняя матрица в пр.2 §11 ступенчатая) равен числу не нулевых ее строк.

Можно доказать, что элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга. Поэтому, используя элементарные преобразования матрицы, приводят ее к треугольному или ступенчатому виду, как в методе Гаусса. Ранг такой матрицы очевиден, в то время как вычисления ранга по определению могут быть слишком громоздкими. Например, ранги матрицы  $A$  системы и расширенной матрицы  $A'$  этой системы (см. пр.2 §11), очевидно, равны между собой,  $\text{Rg} A = \text{Rg} A' = 3$ .

Всякая строка матрицы (1) является вектором пространства  $R_n$ ,  $a_i = (a_{i1} a_{i2} \dots a_{in})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . А любой столбец – это вектор пространства  $R_m$ ,  $a_j = (a_{1j} a_{2j} \dots a_{mj})^T$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . С учетом этого матрицу (1) можно записать короче:

$$A = (a_1 a_2 \dots a_m)^T \text{ или } A = (a'_1 a'_2 \dots a'_n).$$

**Опр.2.** Всякий отличный от нуля минор матрицы  $A$ , порядок которого равен рангу матрицы, называется базисным минором. Строки матрицы  $A$ , входящие в базисный минор, называются базисными.

**Теорема (о базисном миноре).** Базисные строки матрицы линейно независимы. Любую строку матрицы можно представить в виде линейной комбинации базисных строк.

**Доказательство.** Пусть  $RgA = r$  и пусть базисный минор расположен в левом верхнем углу матрицы  $A$ .

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Базисный минор  $M_r \neq 0$  по определению. Докажем, что базисные строки матрицы  $A$ , т.е. векторы  $a_1, a_2, \dots, a_r$  линейно независимы. От противного. Пусть они линейно зависимы, тогда одну из строк можно записать в виде линейной комбинации других. Пусть, например,

$$a_r = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{r-1} a_{r-1} \quad (2)$$

Вычтем из  $r$ -ой строки матрицы  $A$  первую строку, умноженную на  $\alpha_1$ , вторую, умноженную на  $\alpha_2$  и т.д., наконец,  $(r-1)$ -ю, умноженную на  $\alpha_{r-1}$ . После таких преобразований в силу (2)  $r$ -я строка матрицы  $A$  окажется нулевой. Тогда и  $r$ -я строка минора  $M_r$  окажется нулевой и минор будет равен нулю  $M_r = 0$ . С другой стороны такие преобразования согласно свойствам определителя не меняют его значения. Получили противоречие, т.к. по условию  $M_r \neq 0$ . Это и доказывает первую часть теоремы. Вторую часть примем без доказательства.

**Следствие.** Поскольку при транспонировании матрицы ее ранг не меняется, то теорема справедлива и для столбцов.

Заметим, если  $RgA = r$ , то матрица  $A$  имеет только  $r$  линейно независимых строк. А это означает, что СЛАУ, матрица которой совпадает с матрицей  $A$ , имеет только  $r \leq m$  линейно независимых уравнений. Остальные, если





$a_j', j = 1, 2, \dots, n$ . Следовательно, линейно независимых векторов будет меньше  $n$ . Согласно теореме о базисном миноре их число совпадает с рангом, следовательно  $r < n$ . Необходимость доказана.

Пусть теперь  $RgA = r < n$ , тогда из теоремы о базисном миноре следует линейная зависимость системы векторов  $a_1', a_2', \dots, a_n'$ , т.е. равенство (1'), когда не все  $x_j$  равны нулю. Другими словами система (1) имеет нетривиальное решение. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь неоднородную систему  $m$  уравнений с  $n$  неизвестными, которую также запишем в векторном виде

$$Ax = a_1' x_1 + a_2' x_2 + \dots + a_n' x_n = h, \quad (2)$$

где  $h = (h_1 h_2 \dots h_m)^T$ .

**Теорема 2.** (Кронекера-Капелли). Для совместности неоднородной системы необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, т.е.  $RgA = RgA'$ .

**Доказательство.** Пусть система (2) совместна, это означает, что существуют числа  $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ , которые обращают систему (2) в тождество.

$$a_1' \alpha_1 + a_2' \alpha_2 + \dots + a_n' \alpha_n = h. \quad (3)$$

Но тождество (3) означает, что столбец свободных членов  $h$  является линейной комбинацией столбцов матрицы системы (2). Добавление линейно зависимого столбца не изменит ранга матрицы, т.к. согласно теореме о базисном миноре ранг совпадает с числом линейно независимых столбцов. Итак,  $RgA = RgA'$  и необходимость доказана.

Пусть теперь  $RgA = RgA'$ . Докажем, что система (2) совместна. Действительно, если ранги равны, то базисный



Всякое решение  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  представляет собой вектор, а поэтому среди решений могут быть линейно зависимые и линейно независимые решения. Можно доказать, что среди бесконечного множества нетривиальных решений только  $(n-r)$  линейно независимых. Их можно получить следующим образом: положим

$$x_{r+1} = 1, x_{r+2} = x_{r+3} = \dots = x_n = 0.$$

Подставим эти значения свободных неизвестных в правую часть системы (1) и решим ее. Получим единственное решение  $e_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_r^1, 1, 0, \dots, 0)$ .

Подставим теперь в правую часть системы (1)  $x_{r+1} = 0$ ,  $x_{r+2} = 1$ ,  $x_{r+3} = \dots = x_n = 0$ . Решив ее, опять получим единственное решение  $e_2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_r^2, 0, 1, 0, \dots, 0)$ .

Наконец, положим  $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_{n-1} = 0$ ,  $x_n = 1$  и получим решение  $e_{n-r} = (x_1^{n-r}, x_2^{n-r}, \dots, x_r^{n-r}, 0, 0, \dots, 1)$ .

Можно убедиться, что решения  $e_1, e_2, \dots, e_{n-r}$  линейно независимые. Совокупность этих решений называется фундаментальной системой решений.

Если  $e_1$  - решение однородной системы, то, очевидно,  $\alpha_1 e_1$  будет также ее решением. Если  $e_1, e_2, \dots, e_{n-r}$  - решения однородной системы, то их линейная комбинация также будет решением:

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i. \quad (2)$$

Всякое решение системы называется частным решением, а совокупность всех частных решений называется общим решением системы. Таким образом, линейная комбинация фундаментальной совокупности решений (2) является общим решением однородной системы.

**Пример 1.** Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$$

**Решение.** Найдем ранг системы.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & 12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Т.к. ненулевых строк только две, то  $RgA = 2 < 5$  Система имеет бесконечное множество решений, среди которых три линейно независимых.

В качестве базисного минора возьмем  $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ .

Данная система будет равносильна следующей:

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = -3x_1 - 4x_4 + x_5, \\ -2x_3 = x_4 - 3x_5. \end{cases} \quad (3).$$

Положим  $x_1 = 1, x_4 = x_5 = 0$ . Тогда из (3) получим:

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = -3, \\ -2x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3, \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \ell_1 = (1, 3, 0, 0, 0).$$

Положим  $x_1 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ , тогда из (3) следует:

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = -4, \\ -2x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_3 = -0,5. \end{cases} \quad \ell_2 = (0,2, -\frac{1}{2}, 1,0).$$

Наконец, положим  $x_1 = x_4 = 0$ ,  $x_3 = 1$ , получим:

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = 1, \\ -2x_3 = -3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5, \\ x_3 = 1,5. \end{cases} \quad \ell_3 = (0,5, \frac{3}{2}, 0,1).$$

В результате нашли фундаментальную совокупность решений  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$ . Общее решение согласно формуле (2) запишется в виде:  $\tilde{x} = \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \alpha_3 \ell_3$ , где  $\alpha_i$  - произвольные числа.

Рассмотрим теперь неоднородную СЛАУ

$$Ax = h. \quad (4)$$

Пусть  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  - некоторое частное решение неоднородной системы (4), т.е.  $Ax^0 \equiv h$ . Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  - произвольное (общее) решение этой системы, т.е.  $Ax \equiv h$ . Тогда  $Ax - Ax^0 \equiv 0$  или  $A(x - x^0) \equiv 0$ .

Последнее означает, что  $x - x^0 \equiv \tilde{x}$  - общее решение соответствующей однородной системы  $Ax = 0$ . Наоборот, если  $x^0$  - частное решение неоднородной системы (4), а  $\tilde{x}$  - общее решение соответствующей однородной, то  $x = x^0 + \tilde{x}$  - решение неоднородной системы (4).

Действительно,  $Ax = A(x^0 + \tilde{x}) = Ax^0 + A\tilde{x} = h + 0 = h$ .

**Вывод.** Общее решение неоднородной системы (4) равно сумме общего решения соответствующей однородной системы и любого частного решения неоднородной

$$x = x^0 + \tilde{x}. \quad (5)$$

**Пример 2.** Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 1, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 1, \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = -1, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = -1. \end{cases}$$

**Решение.** Проверим систему на совместность.

$$A' = \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 & 5 & 7 & -1 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 & -1 \end{array} \right) \approx \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & -4 & 12 & -4 \end{array} \right) \approx$$

$$\approx \left( \begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 4 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ясно, что  $RgA = RgA' = 2$ . Система совместна и имеет бесконечное множество решений. За базисный минор

возьмем  $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ . Данная система равносильна

следующей: 
$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = -3x_1 - 4x_4 + x_5 + 1, \\ -2x_3 = x_4 - 3x_5 - 1. \end{cases}$$

Положим, например,  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = -1$ ,  $x_5 = 0$ , тогда получим

систему 
$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 = 5, \\ -2x_3 = -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \quad x^0 = (0, -1, 1, -1, 0)$$

Общее решение соответствующей однородной системы найдено в пр.1. Согласно (5) общее решение данной неоднородной системы запишем в виде

$$x = x^0 + \sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i. \quad (6)$$

## § 15. Понятия метрического, линейного и нормированного пространств

Пусть имеется множество  $M$ , состоящее из каких угодно элементов. Для обозначения элементов будем употреблять малые латинские буквы  $a, b, c, \dots, x, y, z$  и греческую букву  $\theta$ . Наряду с элементами множества  $M$  будем рассматривать и числовые множества. Элементы числовых множеств будем обозначать греческими буквами  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$  кроме  $\theta$ . Будем предполагать, что в множестве  $M$  определено каким-то образом понятие равенства элементов, при этом, если  $a = b$ , то и  $b = a$ ; если  $a = b$ ,  $b = c$  то  $a = c$  (транзитивность).

Если в множестве  $M$  введено понятие расстояния между двумя элементами  $x$  и  $y$  этого множества, то такое множество называется метрическим пространством. Элементы метрического пространства называют точками этого пространства.

**Опр.1.** Расстоянием (метрикой) между элементами  $x$  и  $y$  называется действительное число  $\rho(x, y)$ , удовлетворяющее трем условиям (аксиомам):

- 1)  $\rho(x, y) \geq 0$ ,  $\rho(x, y) = 0$ , если  $x = y$ ,
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ,
- 3)  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ ,  $x, y, z \in M$ .

В одном и том же множестве расстояние можно ввести многими способами. В результате получим различные метрические пространства. Например, во множестве непрерывных на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функций расстояние можно ввести по формуле:

$$\rho(x, y) = \max_t |x(t) - y(t)|. \quad (1)$$

Легко проверить, что все аксиомы выполняются. В этом же множестве расстояние можно ввести иначе, например,



$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt \quad (2)$$

или 
$$\rho(x, y) = \left( \int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Аксиомы выполняются для обеих метрик (2) и (3).

Заметим, что любое множество может быть метризовано весьма тривиальным способом. Можно положить

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

При этом все аксиомы метрического пространства будут, очевидно, выполнены. Однако такая метрика мало интересна для приложений.

Введем теперь во множестве  $M$  понятия суммы элементов и произведения элемента на число. Каждым двум элементам  $x$  и  $y$  множества  $M$  сопоставим некоторый третий элемент  $z$  этого же множества и назовем его суммой первых двух  $z = x + y$ .

Каждому элементу  $x$  множества  $M$  и числу  $\alpha$  поставим в соответствие некоторый элемент этого множества  $y$  и назовем его произведением элемента на число  $y = \alpha \cdot x = x \cdot \alpha$ .

Потребуем, чтобы введенные операции удовлетворяли следующим восьми требованиям (аксиомам):

1)  $x + y = y + x$ ;

2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;

3)  $x + \theta = x$ , элемент  $\theta$  называют нулевым;

4) для всякого элемента  $x \in M$  существует элемент  $y \in M$  такой, что  $x + y = \theta$ , элемент  $y$  называют противоположным элементу  $x$  и обозначают  $y = -x$ ;

5)  $1 \cdot x = x$ ;

6)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ;

$$7) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

$$8) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

**Опр.2.** Множество, в котором введены операции сложения и умножения на число, подчиняющиеся восьми аксиомам, называется линейным (векторным) пространством.

Если числа, на которые умножаются векторы, принадлежат множеству действительных чисел  $R$ , то линейное пространство называется линейным действительным (вещественным). Если числа комплексные, то и пространство называется линейным комплексным пространством. Элементы линейного пространства называются векторами. Обозначать линейное пространство будем буквой  $L$ .

**Теорема 1.** Нулевой элемент  $\theta$  в линейном пространстве единственный.

**Доказательство.** Пусть нулевой элемент не единственный. Выберем  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Согласно первой аксиоме  $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$ , а согласно третьей  $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1$ ,  $\theta_2 + \theta_1 = \theta_2$ . Тогда  $\theta_1 = \theta_2$  в силу транзитивности. Теорема доказана.

Аналогично можно доказать, что противоположный элемент единственный.

**Теорема 2.** Произведение вектора на нуль равно нулевому элементу, т.е.  $x \cdot 0 = \theta$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= 0 \cdot x = 0 \cdot x + \theta = 0 \cdot x + x + (-x) = \\ &= (0 + 1)x + (-x) = x + (-x) = \theta. \end{aligned}$$

Теорема доказана. Сверху над равенствами указаны номера используемых аксиом.

Аналогично можно доказать, что  $\alpha \cdot \theta = \theta$  и  $(-1) \cdot x = -x$ .

**Следствие.** В линейном пространстве существует еще одна операция- разность векторов  $x - y = x + (-1)y$ .

Приведем некоторые примеры линейных пространств.

1. Пространства геометрических векторов  $R_1, R_2, R_3$  и координатное пространство  $R_n$  являются линейными пространствами. Все аксиомы легко проверяются.

2. Множество функций  $\{x(t)\}$  непрерывных на отрезке  $[\alpha, \beta]$  с обычными правилами сложения функций и умножения их на число является линейным пространством. В частности множество многочленов степени не выше  $n$

$$P_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n$$

также является линейным пространством.

3. Множество матриц одинаковой размерности является линейным пространством.

4. Нулевое пространство. Пусть некоторое множество состоит только из одного элемента. Обозначим его  $\theta$ . Поскольку элемент один, то положим  $\theta + \theta = \theta$ ,  $\alpha \cdot \theta = \theta$ . Очевидно, этот элемент должен быть нулевым. Можно проверить, что все аксиомы выполняются и нулевое пространство является линейным.

**Замечание.** Если линейное пространство содержит хотя бы один отличный от нулевого элемент  $x$ , то оно содержит их бесконечное множество, т.к. для различных чисел  $\alpha$  и  $\beta$  элементы  $\alpha x$  и  $\beta x$  различные.

5. Рассмотрим множество, элементами которого являются действительные положительные числа. Под суммой двух элементов множества будем понимать обычное умножение чисел:  $x \oplus y = x \cdot y$ , а под умножением элемента на число- степень:  $x \otimes \alpha = x^\alpha$ . Нулевым элементом  $\theta$  будет обычная

единица  $\theta = 1$ , а противоположным элементом – обратное число, т.е.  $-x = \frac{1}{x}$ . Данное пространство будет линейным.

**Упражнение.** Проверить выполнение всех аксиом.

6. Рассмотрим множество наборов упорядоченных чисел, как в  $\mathbb{R}_n$ .

Складывать элементы  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  будем по-прежнему, т.е.  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ , а умножать на число будем иначе, а именно  $\alpha x = (\alpha x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Можно убедиться, что все аксиомы выполняются, кроме седьмой. Действительно,  $(\alpha + \beta)x = ((\alpha + \beta)x_1, x_2, \dots, x_n)$ , но

$$\alpha x + \beta x = ((\alpha + \beta)x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) \text{ т.е. } (\alpha + \beta)x \neq \alpha x + \beta x.$$

Таким образом это множество с такими операциями не является линейным пространством.

Если в линейном пространстве ввести понятие нормы (длины) элемента, то такое пространство называют нормированным. Под нормой элемента  $x$  (обозначают  $\|x\|$ ) линейного пространства  $L$  понимают действительное число, удовлетворяющее трем требованиям (аксиомам):

$$1) \|x\| \geq 0, \|x\| = 0, \text{ если } x = \theta,$$

$$2) \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

В одном и том же линейном пространстве норму можно ввести несколькими способами. Например, в пространстве матриц  $A_{m \times n}$  наиболее употребительны следующие нормы:

$$\|A\|_c = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_n = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_{\max} = \max |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_E = \left( \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

**Пример.** Вычислить выше приведенные нормы для

матрицы  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Решение.**  $\|A\|_c = 17$ ,  $\|A\|_1 = 15$ ,  $\|A\|_M = 9$ ,  $\|A\|_E = \sqrt{203}$ .

## *§ 16. Базис и размерность линейного пространства*

Понятия линейной зависимости и независимости, введенные для геометрических векторов (см. §4), распространим на любые векторы линейного пространства. А именно, если равенство

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \theta \tag{1}$$

возможно только, когда все числа  $\alpha_i$  равны нулю, то система векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется линейно независимой. Если хотя бы одно  $\alpha_i$  отлично от нуля, а равенство (1) верно, то система векторов называется линейно зависимой.

Понятие базиса, введенное нами в пространстве геометрических векторов, также распространим на произвольное линейное пространство.

**Опр.** Упорядоченная система векторов  $\{e_i\}_{i=1}^n$  линейного пространства  $L$  называется базисом этого пространства, если:

- 1) векторы  $e_i$  линейно независимы,

2) при добавлении к данной системе векторов любого другого ненулевого вектора  $x \in L$  получается линейно зависимая система векторов.

Из определения следует, что базис, если он существует, содержит максимально возможное число линейно независимых векторов. Это число называется размерностью линейного пространства. Пишут  $\dim L = n$ .

Нулевое пространство не имеет базиса, его размерность считается равной нулю. Базис пространства  $R_1$ , коллинеарных геометрических векторов, состоит из одного вектора. Размерность этого пространства равна единице. Очевидно,  $\dim R_2 = 2$ ,  $\dim R_3 = 3$ . Существуют и бесконечно мерные линейные пространства. Например, пространство непрерывных на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функций бесконечномерное.

Покажем, что координатное пространство  $R_n$  является  $n$ -мерным, а в качестве базиса можно взять следующую систему векторов этого пространства:

$$\begin{aligned} e_1' &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2' &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots \\ e_n' &= (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Убедимся сначала, что система векторов (2) линейно независима. Действительно, если

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i' = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \theta, \quad (3)$$

то равенство (3) возможно только, если все  $\alpha_i$  равны нулю. Следовательно, система векторов (2) линейно независима.

Убедимся теперь, что система векторов  $e_1', e_2', \dots, e_n', x$ , где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , линейно зависима.

Действительно,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i' + \beta x = (\alpha_1 + \beta x_1, \alpha_2 + \beta x_2, \dots, \alpha_n + \beta x_n) = \theta. \quad (4)$$

Из равенства (4) следует  $\alpha_i + \beta x_i = 0$ . Поскольку вектор  $x$  не нулевой, то найдется  $x_k \neq 0$ . Тогда уравнение

$$\alpha_k + \beta x_k = 0 \text{ будет иметь ненулевое решение } \beta = -\frac{\alpha_k}{x_k}, \text{ что}$$

означает линейную зависимость системы векторов  $e_1', e_2', \dots, e_n', x$ . Итак, мы убедились, что система векторов (2) является базисом пространства  $R_n$ , а т.к. их число  $n$ , то  $\dim R_n = n$ .

Перепишем равенство (4) в виде

$$x = \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\alpha_i}{\beta} \right) e_i'. \quad (5)$$

Равенство (5) называется разложением вектора  $x$  по базису

$\{e_i'\}_{i=1}^n$ , а числа  $\left( -\frac{\alpha_i}{\beta} \right)$  называются координатами вектора

$x$  в этом базисе.

Замечание. Поскольку

$$\sum_{i=1}^n \left( -\frac{\alpha_i}{\beta} \right) e_i' = \left( -\frac{\alpha_1}{\beta}, -\frac{\alpha_2}{\beta}, \dots, -\frac{\alpha_n}{\beta} \right) = x,$$

то из равенства векторов следует, что  $x_i = -\frac{\alpha_i}{\beta}$ , т.е. числа

$x_i$ , образующие вектор  $x$ , являются координатами этого вектора в базисе (2).

**Теорема.** Разложение вектора по базису единственное.

**Доказательство.** Пусть  $\{e_i'\}_{i=1}^n$  — произвольный базис линейного пространства  $L$  и пусть разложение по этому

базису не единственное. Например,  $x = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$  и

$x = \sum_{i=1}^n \beta'_i e_i$ . Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\theta = \sum_{i=1}^n (\beta'_i - \beta_i) e_i.$$

Последнее равенство возможно только при  $\beta'_i = \beta_i$ , а это означает единственность разложения.

Теорема доказана.

**Упражнение.** Убедиться, что векторы  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , являются базисом

пространства матриц второго порядка и разложить матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ , по этому базису.

## § 17. Эвклидово пространство

В пространстве геометрических векторов скалярное произведение было определено в §5. Там же рассмотрены его свойства. Введем теперь понятие скалярного произведения в любом вещественном линейном пространстве.

**Опр.** Скалярным произведением двух векторов  $x$  и  $y$  вещественного линейного пространства называют действительное число  $(x, y)$ , удовлетворяющее следующим четырем требованиям (аксиомам):

1)  $(x, y) = (y, x)$ ;



$$2) (\alpha x, y) = \alpha(x, y), \quad \alpha \in R;$$

$$3) (x + y, z) = (x, z) + (y, z), \quad x, y, z \in L;$$

$$4) (x, x) > 0, \text{ если } x \neq \theta, \quad (x, x) = 0, \text{ если } x = \theta.$$

(сравни эти аксиомы со свойствами скалярного произведения в §5).

Вещественное линейное пространство со скалярным произведением называют евклидовым и обозначают  $E$ .

Замечание. В комплексном линейном пространстве скалярным произведением является комплексное число, удовлетворяющее перечисленным выше аксиомам 2, 3, 4.

Первая аксиома заменяется на следующую:  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ , где черта означает комплексное сопряжение. Комплексное линейное пространство со скалярным произведением называют унитарным.

Евклидово пространство  $E$  является одновременно нормированным и метрическим. Норму и метрику в евклидовом пространстве вводят следующим образом:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad (1)$$

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}. \quad (2)$$

Можно проверить, что все аксиомы для нормы и расстояния выполняются.

Приведем некоторые примеры евклидовых пространств.

1. Координатное пространство  $R_n$ .

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (3)$$

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

$$\rho(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

2. Пространство непрерывных на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функций

$$(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y(t)dt, \quad (6)$$

$$\|x\| = \left( \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t)dt \right)^{1/2}, \quad (7)$$

$$\rho(x, y) = \left( \int_{\alpha}^{\beta} (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2}. \quad (8)$$

3. Пространство многочленов степени не выше  $n$ .

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n,$$

$$g(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_n t^n.$$

$$(f, g) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \beta_i, \quad (9)$$

$$\|f\| = \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \right)^{1/2}, \quad (10)$$

$$\rho(f, g) = \left( \sum_{i=0}^n (\alpha_i - \beta_i)^2 \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Можно проверить, что все аксиомы скалярного произведения выполняются.

Замечание. Не следует думать, что скалярное произведение можно ввести единственным способом. Например, в пространстве многочленов скалярное произведение можно ввести и по формуле (6).

**Теорема.** В евклидовом пространстве выполняется неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y). \quad (12)$$

**Доказательство.** По аксиоме 4 для всякого  $\lambda \in R$  имеем

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) \geq 0. \quad (13)$$

Используя аксиомы 2, 3, преобразуем левую часть неравенства (13) так:

$$\lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0. \quad (14)$$

Необходимым и достаточным условием неотрицательности квадратного трехчлена (14) является условие, чтобы его дискриминант не был положительным, т.е.  $D = b^2 - 4ac \leq 0$  или  $4 \cdot (x, y)^2 - 4(x, x) \cdot (y, y) \leq 0$ .

Последнее неравенство совпадает с (12). Теорема доказана. В линейном пространстве можно ввести понятие коллинеарности векторов. Если  $y = \alpha x$ ,  $\alpha \in R$ , то векторы  $x$  и  $y$  коллинеарны. Очевидно нулевой вектор  $\theta$  коллинеарен любому другому вектору. Для коллинеарных векторов неравенство Коши-Буняковского обращается в равенство.

Кроме коллинеарности в евклидовом пространстве можно ввести понятие ортогональности векторов. Если  $(x, y) = 0$ , то векторы  $x$  и  $y$  ортогональны.

Очевидно, нулевой вектор  $\theta$  ортогонален любому другому вектору.

Понятие угла между векторами  $x$  и  $y$  в евклидовом пространстве можно ввести по формуле

$$\cos(\hat{x}, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \quad (15)$$

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что  $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , поэтому  $|\cos(\hat{x}, y)| \leq 1$ .

Найдем квадрат нормы

$$\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = (x, x) - 2(x, y) + (y, y). \quad (16)$$

Равенство (16) с учетом (15) перепишем так:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\hat{x}, y) + \|y\|^2. \quad (17)$$

Равенство (17) выражает теорему косинусов.

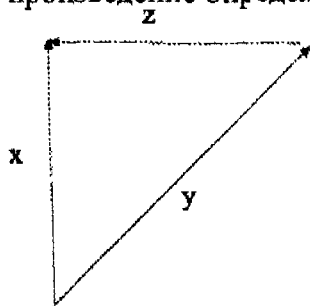
Если  $\cos(\hat{x}, y) = 0$ , т.е. векторы  $x$  и  $y$  ортогональны, то из (17) получим теорему Пифагора:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (18)$$

Умножив вектор  $x$  на величину  $\frac{1}{\|x\|}$ , мы можем нормировать любой ненулевой вектор евклидова пространства, т.е. сделать его длину (норму) равной единице. Поэтому в евклидовом пространстве можно ввести понятие ортонормированного базиса.

Базис  $\{e_i\}_{i=1}^n$  называется ортонормированным, если  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ . Примером ортонормированного базиса в евклидовом пространстве  $R_n$  является базис, определяемый формулами (2)§16. Можно доказать, что любая система попарно ортогональных векторов линейно независима и любой базис в евклидовом пространстве можно ортонормировать.

**Пример.** В треугольнике, сторонами которого являются многочлены  $x = 2t^2 + t + 1, y = 3t^2 - t + 1$ , найти длины сторон и углы между сторонами, если скалярное произведение определяется формулой (9).



**Решение.** По аналогии с геометрическими векторами третьей стороной треугольника будет многочлен

$$z = x - y = -t^2 + 2t.$$

Для нахождения длин сторон треугольника воспользуемся формулой (10). В результате

получим  $\|x\| = \sqrt{6}$ ,  $\|y\| = \sqrt{11}$ ,  $\|z\| = \sqrt{5}$ .

Поскольку  $(x, z) = 0$ , то треугольник прямоугольный. Для нахождения двух других углов воспользуемся формулой

$$(15). \cos(\hat{x}, y) = \frac{6}{\sqrt{66}}, \cos(\hat{y}, z) = -\frac{5}{\sqrt{55}}.$$

**Упражнение.** Решить эту задачу, но скалярное произведение многочленов  $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ ,

$g(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$  определить формулой

$$(f, g) = \alpha_0 \beta_0 + 2\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2.$$

## § 18. Прямая и гиперплоскость в евклидовом пространстве

Пусть  $x^0$  и  $a$  — некоторые фиксированные векторы в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E$ . По аналогии с прямой в пространстве  $R$ , (см. (1)§7) назовем прямой линией в пространстве  $E$  множество векторов этого пространства, удовлетворяющих уравнению

$$x = x^0 + ta. \quad (1)$$

Вектор  $a$  называют направляющим вектором,  $t \in R$  — параметр.

Если в евклидовом пространстве выбрать некоторый ортонормированный базис, то векторы  $x, x^0, a$  можно записать через их координаты в этом базисе:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ,  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Из сравнения векторов в уравнении (1) получим параметрические уравнения прямой

$$x_i = x_i^0 + ta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Введем теперь понятие плоскости в евклидовом пространстве. Пусть  $x^0$  — некоторый фиксированный

вектор,  $x^0 \in E$ , и  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ( $k \leq n$ ) – система линейно независимых векторов пространства  $E$ . По аналогии с плоскостью в  $R_3$  (см.(14) §6) назовем плоскостью размерности  $k$  в эвклидовом пространстве  $E$  множество векторов, удовлетворяющих уравнению

$$x = x^0 + \sum_{i=1}^k t_i a_i, \quad t_i \in R. \quad (3)$$

При  $k=1$  уравнение (3) представляет собой уравнение прямой (1), при  $k=n$  множество векторов (3) представляет собой пространство  $E$ . При  $k=n-1$  плоскость (3) называют гиперплоскостью. Гиперплоскость в пространстве  $E$  играет такую же роль, как обычная плоскость в  $R_3$ .

Т.к. пространство  $E$   $n$ - мерное, то систему векторов  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  можно дополнить до базиса еще одним линейно независимым вектором  $\vec{n}$ . Поскольку базис всегда можно ортонормировать, то вектор  $\vec{n}$  всегда можно выбрать ортогональным векторам  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Положив в равенстве (3)  $k=n-1$ , умножим его скалярно на вектор  $\vec{n}$ . В силу ортогональности векторов получим

$$(\vec{n}, x - x^0) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) называют векторным уравнением гиперплоскости (сравним с (1) §6). Перепишем уравнение (4) в скалярном виде. Если  $\vec{n} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ , то

$$A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + \dots + A_n(x_n - x_n^0) = 0. \quad (4')$$

Вектор  $\vec{n}$  называют нормальным вектором гиперплоскости (4). Гиперплоскость делит все пространство  $E$  на две части- положительную, для которой  $(\vec{n}, x - x^0) > 0$  и отрицательную, для которой  $(\vec{n}, x - x^0) < 0$ .

**Пример.** Найти пересечение четырех гиперплоскостей пространства  $R_5$ .

$$(n^1, x - x^1) = 0, \quad (n^2, x - x^2) = 0, \quad (n^3, x - x^3) = 0, \quad (n^4, x - x^4) = 0,$$

если  $n^1 = (3, -1, 4, 4, -1), \quad n^2 = (6, -2, 6, 7, 1),$

$$n^3 = (6, -2, 2, 5, 7), \quad n^4 = (9, -3, 4, 8, 9),$$

$$x^1 = (0, 0, 0, 0, -1), \quad x^2 = (0, 0, 0, 0, 1),$$

$$x^3 = (0, 0, 2, -1, 0), \quad x^4 = (0, 0, 0, 1, -1).$$

**Решение.** Запишем гиперплоскости в скалярном виде. Требование пересечения плоскостей приводит к следующей системе:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 - 1 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 - 1 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 + 1 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 1 = 0. \end{cases}$$

Эта система решена ранее (см. пр.2 §14). Общее решение

$$x = x^0 + \sum_{i=1}^3 a_i e_i$$

представляет собой плоскость размерности

$k = 3$  в пространстве  $R_5$ .

Итак, пересечением четырех гиперплоскостей является плоскость размерности  $k = 3$ .

## § 19. Корни алгебраического многочлена.

### Разложение многочлена на множители

Алгебраическим многочленом  $n$ -ой степени называют выражение вида

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (1)$$

где  $z = x + iy$  - переменная комплексная величина,  $a_i$  - коэффициенты многочлена, постоянные комплексные числа

Алгебраический многочлен (1) называют целой рациональной функцией комплексного переменного  $z$

Разделим  $P_n(z)$  на  $(z - z_0)$ , где  $z_0$  – некоторое число. В результате получим частное  $P_{n-1}(z)$  – многочлен, степень которого на единицу меньше степени делимого, и остаток  $r$ . Так как степень остатка не должна превышать степени делителя  $(z - z_0)$ , то, очевидно, остаток есть многочлен нулевой степени, т.е. число. Таким образом

$$P_n(z) = P_{n-1}(z)(z - z_0) + r, \quad (2)$$

т.е. делимое равно частному, умноженному на делитель, плюс остаток. Равенство (2) является тождеством, верным при любых значениях  $z$ , в том числе и при  $z = z_0$ . В этом случае  $P_n(z_0) = r$

Сформулируем теперь все выше сказанное в виде теоремы.  
**Теорема 1 (Безу).** При делении многочлена  $P_n(z)$  на  $(z - z_0)$  получается остаток, равный значению многочлена при  $z = z_0$ , т.е.  $r = P_n(z_0)$

Число  $z_1$ , называется корнем (нулём) многочлена  $P_n(z)$ , если  $P_n(z_1) = 0$ . Тогда согласно теореме Безу остаток от деления этого многочлена на  $(z - z_1)$  равен нулю, т.е. многочлен в этом случае нацело делится на  $(z - z_1)$

Найти частное

$$P_{n-1}(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1}, \quad (3)$$

от деления  $P_n(z)$  на  $(z - z_0)$  можно столбиком, но удобнее воспользоваться методом Горнера. Подставляя (1) и (3) в (2), получим тождество

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = (b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1})(z - z_0) + r$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ , найдем, что  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 = b_1 - b_0 z_0$ ,  $a_n = r - b_{n-1} z_0$  или

$$b_0 = a_0, \quad b_k = z_0 b_{k-1} + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad r = z_0 b_{n-1} + a_n \quad (4)$$



Из (4) видно, что старший коэффициент частного совпадает со старшим коэффициентом делимого, а каждый последующий коэффициент частного, включая и остаток, получается как сумма произведения  $z_0$  на предыдущий уже найденный коэффициент и соответствующего коэффициента делимого.

**Пример 1.** Разделить многочлен

$$P_5(z) = z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 4z^2 + z - 2 \text{ на } (z-1) \text{ и на } (z-2).$$

**Решение.** Выпишем все коэффициенты делимого, начиная со старшего, в первую строку таблицы.

$z_0 = 1$	1	-2	2	-4	1	-2
$z_0 = 2$	1	-1	1	-3	-2	-4
	1	0	2	0	1	0

Первый коэффициент снесем во вторую строку таблицы. При делении на  $(z-1)$  умножим  $z_0 = 1$  на этот коэффициент, добавим второй коэффициент первой строки, а результат запишем во вторую строку таблицы ( $1 \cdot 1 - 2 = -1$ ). Затем умножим  $z_0 = 1$  на полученный коэффициент, добавим третий коэффициент первой строки, а результат запишем во вторую строку и т. д. В результате получим во второй строке коэффициенты частного и остаток  $r = -4$ . Таким образом

$$P_5(z) = (z^4 - z^3 + z^2 - 3z - 2)(z-1) - 4.$$

Аналогично поступаем при делении  $P_5(z)$  на  $(z-2)$ . Коэффициенты частного и остаток запишем в третью строку таблицы. Как видно, в этом случае  $r = 0$ , следовательно  $z_0 = 2$  - корень многочлена  $P_5(z)$ . Поэтому

$$P_5(z) = (z^4 + 2z^2 + 1)(z-2) = (z^2 + 1)^2(z-2).$$

**Теорема 2.** Всякий алгебраический многочлен  $n$ -ой степени имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

(Без доказательства).

Теорему 2 называют основной теоремой алгебры. Используя её, докажем следующую теорему.

**Теорема 3.** Всякий многочлен  $n$ -ой степени имеет ровно  $n$  корней.

**Доказательство.** Пусть  $z = z_1$  — корень многочлена (1).

Тогда  $P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z)$ . (5)

Поскольку  $P_{n-1}(z)$  является многочленом, то согласно теореме 2, имеет корень.

Пусть  $z = z_2$  — его корень, тогда

$$\begin{aligned} P_{n-1}(z) &= (z - z_2)P_{n-2}(z), \text{ а} \\ P_n(z) &= (z - z_1)(z - z_2)P_{n-2}(z). \end{aligned} \quad (6)$$

Продолжая этот процесс, получим после  $n$ -го шага

$$\begin{aligned} P_n(z) &= (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)P_0 = \\ &= a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $P_0$  — многочлен нулевой степени, т.е. число. Из (7) очевидным образом следует, что многочлен  $n$ -ой степени имеет ровно  $n$  корней. Теорема доказана.

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $z$  тождества (7), получим

$$\begin{aligned} a_0 &= P_0, \\ a_1 &= -(z_1 + z_2 + \dots + z_n)P_0, \\ a_2 &= (z_1z_2 + z_1z_3 + \dots + z_{n-1}z_n)P_0, \dots, \\ a_n &= (-1)^n z_1z_2 \dots z_n P_0. \end{aligned}$$

Перепишем последние формулы в виде:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= -(z_1 + z_2 + \dots + z_n), \\ \frac{a_2}{a_0} &= z_1z_2 + z_1z_3 + \dots + z_{n-1}z_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{a_n}{a_0} &= (-1)^n z_1z_2 \dots z_n. \end{aligned} \quad (8)$$

Равенства (8) выражают теорему Виета.

Поскольку среди корней многочлена могут быть равные, то разложение (7) можно переписать так :

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_j)^{k_j}, \quad (9)$$

где  $k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$ , числа  $k_1, k_2, \dots, k_j$  называются кратностью соответствующих корней. Если кратность равна единице, то корень называется простым.

**Теорема 4.** Если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень  $z_1$ , то он имеет и комплексно сопряженный корень  $\bar{z}_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $z_1$  - корень многочлена  $P_n(z)$ , т.е.

$$a_0 z_1^n + a_1 z_1^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Возьмём комплексно сопряжённую величину

$$\overline{a_0 z_1^n + a_1 z_1^{n-1} + \dots + a_n} = 0.$$

Поскольку  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ , а коэффициенты  $a_i$  действительные, то получим

$$a_0 \bar{z}_1^n + a_1 \bar{z}_1^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Последнее означает, что  $\bar{z}_1$  - корень многочлена. Теорема доказана.

Можно убедиться, что кратности корней  $z_1$  и  $\bar{z}_1$  одинаковые.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (x - z_1)(x - \bar{z}_1) &= x^2 - x(z_1 + \bar{z}_1) + z_1 \bar{z}_1 = \\ &= x^2 - x \cdot 2 \operatorname{Re} z_1 + |z_1|^2 = x^2 + px + q. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражение (10) является квадратным трехчленом с действительными коэффициентами  $p = -2 \operatorname{Re} z_1$ ,  $q = |z_1|^2$ .

Пусть многочлен (1) с действительными коэффициентами  $a_i$  имеет действительные корни  $x_1, x_2, \dots, x_r$  и комплексные  $z_1, z_2, \dots, z_s$ . Группируя попарно множители с комплексно

сопряженными корнями и учитывая (10), разложение (9) можно переписать в виде:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} \\ (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{l_2} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{l_s}. \quad (11)$$

Здесь  $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_s) = n$ , коэффициенты  $p_i, q_i$  — действительные, а квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

**Пример 2.** Разложить многочлен

$$P_5(z) = z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 4z^2 + z - 2$$

на линейные множители и на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами.

**Решение.** В примере 1 мы уже получили разложение на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами:  $P_5(z) = (z^2 + 1)^2(z - 2)$ . Найдём теперь комплексные корни множителя  $(z^2 + 1)$ . Его корни, очевидно,  $z_1 = i, z_2 = -i$ .

Поэтому разложение только на линейные множители следующее:

$$P_5(z) = (z - i)^2(z + i)^2(z - 2).$$

Корни  $\pm i$  второй кратности.

Замечание. Теоремы 2,3, доказывая существование корней многочлена, не дают способа их нахождения. Из школьного курса математики известна формула нахождения корней квадратного трёхчлена. Существуют формулы для нахождения корней многочленов 3-ей и 4-ой степеней. Это формулы Кардано. Но для многочленов степени  $n > 4$  формул, выражающих корни многочленов через его коэффициенты, не существует, что было доказано норвежским математиком Абелем.

**Пример 3.** Разложить многочлен

$$P_4(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

на линейные множители.

**Решение.** Если коэффициент многочлена  $a_0 = 1$ , то целые корни многочлена следует искать среди делителей свободного члена  $a_n$ , что ясно из теоремы Виета. В нашем случае возможными целыми корнями являются  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ .

Проверим, являются ли числа  $\pm 1$  корнями многочлена, по схеме Горнера.

1	1	-1	-7	1	6	Т.к остатки нулевые, то $\pm 1$ являются корнями и $P_4(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - x - 6)$ . Корнями квадратного трехчлена являются числа $-2$ и $3$ , поэтому $P_4(x) = (x-1)(x+1)(x+2)(x-3)$
1	1	0	-7	-6	0	
-1	1	-1	-6	0		

## § 20. Разложение рациональной дроби на простейшие

Рациональной дробью (рациональной функцией) называется отношение двух многочленов  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ .

Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена  $P(x)$  меньше степени многочлена  $Q(x)$ , в противном случае – неправильной. Если рациональная дробь неправильная, то проведя деление числителя на знаменатель столбиком, её можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (выделить целую часть).

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

Здесь  $R(x)$  - целая рациональная функция, а рациональная дробь  $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$  правильная.

**Пример 1.** Выделить целую часть рациональной дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 3x + 11}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2}$$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \dots & x^2 + 1 \\ \hline 2x^2 + 2x + 13 & \end{array}$$

**Решение.** Т.к. дробь неправильная, то разделив столбиком числитель на знаменатель, получим частное  $x^2 + 1$  и остаток

$$r = 2x^2 + 2x + 13.$$

Тогда, очевидно,

$$P(x) = (x^2 + 1) Q(x) + r \text{ или}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + 1 + \frac{r}{Q(x)} = x^2 + 1 + \frac{2x^2 + 2x + 13}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2}.$$

Целая часть  $R(x) = x^2 + 1$  выделена.

Правильные рациональные дроби вида  $\frac{A}{(x-a)^n}$ ,

$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m}$ , где все коэффициенты действительные, а

трёхчлен не имеет действительных корней, называются простейшими дробями.

Покажем, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших.

**Лемма 1.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  - правильная рациональная дробь.

Если  $x_1$  является действительным корнем кратности  $k_1$

знаменателя, т.е.  $Q(x) = (x - x_1)^{k_1} Q_1(x)$ ,  $Q_1(x_1) \neq 0$ , то имеет место равенство

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{P_1(x)}{(x - x_1)^{k_1-1} Q_1(x)}, \quad (1)$$

причем, рациональная дробь в правой части правильная и  $A_1 \neq 0$ .

**Доказательство.** Добавим и вычтем к рациональной дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  выражение  $\frac{A_1}{(x - x_1)^{k_1}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{P(x)}{(x - x_1)^{k_1} \cdot Q_1(x)} - \frac{A_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{A_1}{(x - x_1)^{k_1}} = \\ &= \frac{P(x) - A_1 Q_1(x)}{(x - x_1)^{k_1} \cdot Q_1(x)} + \frac{A_1}{(x - x_1)^{k_1}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подберем  $A_1$  так, чтобы многочлен  $P(x) - A_1 Q_1(x)$  делился нацело на  $(x - x_1)$ . По теореме Безу в этом случае  $P(x_1) - A_1 Q_1(x_1) = 0$  и поскольку  $Q_1(x_1) \neq 0$ , то  $A_1$  существует и  $A_1 = \frac{P(x_1)}{Q_1(x_1)}$ . При этом  $P(x) - A_1 Q_1(x) = (x - x_1) P_1(x)$ , где  $P_1(x)$  - многочлен, степень которого на единицу меньше степени многочлена  $P(x)$ .

Сокращая дробь в равенстве (2) на  $(x - x_1)$ , получим (1). Все рациональные дроби в (1) правильные, т.к. разность правильных дробей является правильной дробью. Лемма доказана.

Правильную дробь  $\frac{P_1(x)}{(x - x_1)^{k_1-1} \cdot Q_1(x)}$  в равенстве (1)

согласно лемме в свою очередь можно представить в виде

$$\frac{P_1(x)}{(x-x_1)^{k_1-1} \cdot Q_1(x)} = \frac{A_2}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-x_1)^{k_1-2} \cdot Q_1(x)}$$

После использования леммы  $k_1$  раз получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}}{x-x_1} + \frac{P_{k_1}(x)}{Q_1(x)}. \quad (3)$$

Пусть  $x_2$  — второй действительный корень знаменателя

$$Q(x) \text{ кратности } k_2. \text{ Тогда } Q_1(x) = (x-x_2)^{k_2} Q_2(x).$$

Аналогично согласно лемме получим

$$\frac{P_{k_1}(x)}{Q_1(x)} = \frac{B_1}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{P_{k_2}(x)}{Q_2(x)}. \quad (4)$$

Этот процесс будем продолжать, пока не переберём все действительные корни знаменателя  $Q(x)$ . Допустим мы это уже сделали, выделили все простейшие дроби вида

$$\frac{A'}{(x-a)^n} \text{ и получили правильную рациональную дробь}$$

$$\frac{R(x)}{S(x)} \text{ в качестве последнего слагаемого. Многочлен } S(x)$$

действительных корней уже не имеет, тогда он имеет комплексные корни. Согласно результату § 19 его можно

$$\text{представить в виде } S(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdot S_1(x), \quad (5)$$

где  $l_1$  — кратность первой пары комплексно сопряженных корней, а степень многочлена  $S_1(x)$  на  $2l_1$  меньше степени многочлена  $S(x)$ .

**Лемма 2.** Если имеет место равенство (5), правильную рациональную дробь  $\frac{R(x)}{S(x)}$  можно представить в виде

$$\frac{R(x)}{S(x)} = \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \frac{R_1(x)}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1-1} S_1(x)}. \quad (6)$$



(Без доказательства).

Используя лемму 2 несколько раз, мы выделим все простейшие дроби вида  $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m}$ .

Суммируя всё выше сказанное, оформим вывод в виде следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  – правильная рациональная дробь с действительными коэффициентами, знаменатель которой имеет вид

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_n)^{k_n} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots \\ \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}.$$

Тогда для этой дроби справедливо следующее разложение

$$\text{на сумму простейших. } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{k_1-1}} + \\ + \dots + \frac{A_{k_1}}{x - x_1} + \frac{B_1}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{B_{k_2}}{x - x_2} + \dots + \frac{C_1}{(x - x_n)^{k_n}} + \dots + \\ + \frac{C_{k_n}}{x - x_n} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1-1}} + \dots + \\ + \frac{M_lx + N_l}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_mx + N_m}{x^2 + p_mx + q_m}. \quad (7)$$

Здесь все коэффициенты действительные. Для нахождения коэффициентов  $A_i$ ,  $B_i$  и т.д. следует привести правую часть тождества (7) к общему знаменателю и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  числителей.

**Пример 2.** Разложить на простейшие дроби правильную дробь примера 1:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2}.$$

**Решение.**  $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2 = (x-2)(x^2+1)^2$  (см. пр.1 §19).

Согласно теореме 
$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{a_1}{x-2} + \frac{a_2x + a_3}{x^2+1} + \frac{a_4x + a_5}{(x^2+1)^2}.$$

Приведем к общему знаменателю и сравним числители  $2x^2 + 2x + 13 \equiv$

$$\equiv a_1(x^2+1)^2 + (a_2x + a_3)(x^2+1)(x-2) + (a_4x + a_5)(x-2).$$

Сравнивая коэффициенты при степенях  $x^4, x^3, x^2, x^1, x^0$ , получим систему

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ -2a_2 + a_3 = 0, \\ 2a_1 + a_2 - 2a_3 + a_4 = 2, \\ -2a_2 + a_3 - 2a_4 + a_5 = 2, \\ a_1 - 2a_3 - 2a_5 = 13 \end{cases}$$

Решая систему, найдем  $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -2, a_4 = -3, a_5 = -4$  и тем самым получим разложение на сумму простейших дробей.

**Пример 3.** Разложить  $\frac{x^2 + x + 1}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6}$  на простейшие дроби.

**Решение.**  $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = (x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$  (см. пр.3 §13).

Согласно теореме 
$$\frac{x^2 + x + 1}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{a_1}{x+1} +$$

$+\frac{a_2}{x-1} + \frac{a_3}{x+2} + \frac{a_4}{x-3}$ . Поскольку все корни знаменателя

простые и действительные, то коэффициенты  $a_i$  можно найти проще. Умножая последовательно обе части последнего тождества на  $x+1$ ,  $x-1$ ,  $x+2$ ,  $x-3$  и полагая  $x = -1; 1; -2; 3$ , получим

$$a_1 = \frac{1}{8}, a_2 = -\frac{1}{4}, a_3 = -\frac{1}{5}, a_4 = \frac{13}{40}.$$

Разложение на простейшие дроби нам понадобится при интегрировании рациональных дробей.

## **ГЛАВА 2. Введение в анализ**

### **§ 1. Некоторые свойства множества действительных чисел**

Если  $x$  есть элемент некоторого множества  $A$ , то пишут  $x \in A$ . Запись  $x \notin A$  означает, что  $x$  не является элементом множества  $A$ . Если любой элемент  $x \in A$  является также элементом множества  $B$ , то пишут  $A \subset B$ . Говорят, что  $A$  входит в  $B$ ,  $A$  есть часть  $B$  или  $A$  есть подмножество множества  $B$ . Например, множество натуральных чисел  $N$  – это подмножество рациональных  $Q$  и действительных  $R$ ,  $N \subset Q$ ,  $N \subset R$ . Если  $A \subset B$ , а  $B \subset A$ , то  $A = B$ .

Суммой (объединением) двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $C$ , которое включает в себя все элементы  $A$  и  $B$ . Пишут  $C = A + B$ , или  $C = A \cup B$ . Разностью множеств  $A$  и  $B$  называют множество  $C$ , содержащее все элементы  $A$ , не принадлежащие  $B$ . Пишут  $C = A - B$ , или  $C = A \setminus B$ . Произведением (пересечением) множеств  $A$  и  $B$  называют множество  $C$ , содержащее все элементы, принадлежащие  $A$  и  $B$ . Пишут  $C = A \cdot B$ , или  $C = A \cap B$ .

Различают множества конечные, содержащие конечное число элементов, и бесконечные, число элементов которых бесконечно. Если всякому элементу  $x \in A$  по некоторому правилу поставить в соответствие единственный элемент  $y \in B$  и, наоборот, по тому же правилу всякому элементу множества  $B$  поставлен в соответствие единственный элемент множества  $A$ , то говорят, что установлено взаимно однозначное соответствие между элементами множеств  $A$  и  $B$ . Такие множества называют эквивалентными. Пишут  $A \sim B$ . Например, между точками числовой оси и действительными числами установлено взаимно однозначное соответствие, о котором мы уже

говорили в §1 гл.1. Очевидно, эквивалентные конечные множества содержат одно и тоже число элементов. Если эквивалентные множества бесконечные, то этого утверждать нельзя. В этом случае говорят, что множества имеют одну и ту же мощность.

Бесконечное множество, элементы которого можно пронумеровать с помощью натуральных чисел (установить взаимно однозначное соответствие), называется счётным. Очевидно, само множество  $\mathbb{N}$  является счётным.

**Опр.1.** Всякое бесконечное нумерованное множество называется числовой последовательностью. Обозначают её так  $\{x_n\}$ , или  $x_1, x_2, x_3, \dots$ .

**Теорема 1.** Множество положительных рациональных чисел является счётным.

**Доказательство.** Чтобы доказать теорему, достаточно установить способ нумерации положительных рациональных чисел, т.е. предложить способ выписать все их в виде последовательности.

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...	Выпишем все положительные рациональные числа в виде таблицы. Способ построения последовательности этих чисел указан в самой таблице стрелками.
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	...	
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	...	
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	...	
...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	

Повторяющиеся числа можно опустить. Теорема доказана. Можно доказать, что и множество всех рациональных чисел является счётным, т.е.  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ . Поскольку  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$  и  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ , то для бесконечных множеств часть может быть эквивалентна целому.

**Теорема 2.** Множество действительных чисел отрезка  $[0,1]$  несчётное.

**Доказательство** (от противного). Предположим, что все действительные числа этого отрезка, записанные в виде бесконечных десятичных дробей, выписаны в виде последовательности:

$$x^1 = 0, \alpha_1^1 \alpha_2^1 \alpha_3^1 \dots,$$

$$x^2 = 0, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots,$$

$$x^3 = 0, \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 \dots,$$

.....

Составим еще одно число  $a = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ . Потребуем, чтобы  $\alpha_1 \neq \alpha_1^1$ ,  $\alpha_2 \neq \alpha_2^2$ ,  $\alpha_3 \neq \alpha_3^3$ , и т.д., что всегда выполнимо. Очевидно, что число  $a$  не совпадает ни с одним из чисел выписанной последовательности, т.е. с  $x^1$  у них разные десятые, с  $x^2$  разные сотые и т.д. Итак, число принадлежит отрезку  $[0,1]$ , но его нет в выписанной последовательности. Получили противоречие, которое и доказывает теорему.

Можно доказать, что множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел также несчётное. Говорят, что множество действительных чисел имеет мощность континуума.

Множество  $E$  действительных чисел называется ограниченным сверху, если существует действительное число  $M$  такое, что для всех  $x \in E$  имеет место неравенство  $x \leq M$ . Символически это предложение можно записать так:  $\exists M \forall x \in E (x \leq M)$ . Знаки  $\exists$  и  $\forall$  называются кванторами существования и всеобщности соответственно. Аналогично, если  $\exists m \forall x \in E (x \geq m)$ , то множество  $E$  называется ограниченным снизу. Множество ограниченное снизу и сверху называется ограниченным. ( $\exists m, M \forall x \in E (m \leq x \leq M)$ ).

**Опр.2.** Число  $M$  называется точной верхней гранью множества действительных чисел  $E$ , если выполняются требования:

- 1)  $\forall x \in E (x \leq M)$ ,

2)  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in E (M - x_0 < \varepsilon)$ .

Пишут  $M = \sup E$ . Аналогично определяется точная нижняя грань множества  $E$   $m = \inf E$ . (Дать определение самостоятельно).

**Теорема 3.** Всякое ограниченное множество действительных чисел имеет точные верхнюю и нижнюю грани. (Без доказательства).

**Опр.3.** Окрестностью точки  $x_0$  называют любой интервал содержащий эту точку. Если точка  $x_0$  является серединой этого интервала, то она называется центром окрестности, длина  $\varepsilon$  половины этого интервала называется радиусом окрестности, а сама окрестность называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0$  и обозначается  $O(x_0, \varepsilon)$ .

Окрестностью бесконечно удаленной точки называют множество всех таких точек, что  $|x| > \varepsilon$ . Обозначают  $O(\infty, \varepsilon)$ .

## § 2. Предел последовательности

Рассмотрим последовательность  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ . Её можно

рассматривать как переменную величину  $x_n = \frac{n}{n+1}$ ,

$n = 1, 2, 3, \dots$ , функцию натурального аргумента  $x_n = f(n)$ .

Значение данной переменной величины  $x_n$  отличается от единицы на 0,1 при  $n = 9$ , на 0,01 при  $n = 99$ , на 0,001 при  $n = 999$  и т.д. Очевидно, что эта переменная величина может как угодно близко приблизиться к единице. Говорят, что единица является её пределом.

**Опр.1.** Число  $a$  называется пределом числовой последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N_\varepsilon$ , что все

значения  $x_n$  при  $n > N_\varepsilon$  удовлетворяют неравенству  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

Пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

Геометрически это означает, что для любой  $O(a, \varepsilon)$  найдётся такой номер  $N_\varepsilon$ , что все  $x_n$  при  $n > N_\varepsilon$  будут принадлежать этой  $\varepsilon$ -окрестности. ( $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon (n > N_\varepsilon \Rightarrow x_n \in O(a, \varepsilon))$ ).

Если  $x_n = C = \text{const}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$ , т.к.  $|x_n - C| = 0 < \varepsilon$  для любых  $n$ .

Чтобы найти предел последовательности, используя только его определение, следует поступить так:

- 1) предположить, что предел равен  $a$ ;
- 2) решить неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$  относительно  $n$  для любого  $\varepsilon > 0$ ;
- 3) если решение неравенства имеет вид  $n > N_\varepsilon$ , то предположение, что предел равен  $a$ , верно и предел найден.

**Пример 1.** Найти предел последовательности  $x_n = \frac{n}{n+1}$ .

**Решение.** 1) Предположим, что  $a = 1$ .

2) Решим неравенство  $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ ,

$$1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N_\varepsilon$$

3) Итак, для всех  $n > N_\varepsilon$  неравенство



$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \text{ выполняется, поэтому } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

согласно определению предела

**Замечание.** Число  $\frac{1}{\varepsilon} - 1$  не для всех  $\varepsilon$  является натуральным, поэтому за  $N_\varepsilon$  следует взять целую часть этого числа, т.е.  $N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$ .

**Теорема 1.** Если последовательность имеет предел, то он единственный.

**Доказательство** (от противного). Пусть предел не единственный. Выберем два предела  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  и  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,

$a < b$ . Выберем  $O(a, \varepsilon)$  и  $O(b, \varepsilon)$  так, чтобы они не имели общих точек. Для этого достаточно взять  $\varepsilon < \frac{1}{2}(b-a)$ . По определению предела  $\exists N_1 \forall n > N_1 (x_n \in O(a, \varepsilon))$  и  $\exists N_2 \forall n > N_2 (x_n \in O(b, \varepsilon))$ . Пусть  $N_3 = \max(N_1, N_2)$ , тогда  $\forall n > N_3 (x_n \in O(a, \varepsilon) \wedge x_n \in O(b, \varepsilon))$ , что не возможно, т.к. окрестности не пересекаются. ( $\wedge$  - символ конъюнкции). Полученное противоречие доказывает теорему.

**Опр.2.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно большой (пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$ ), если для любого значения  $M > 0$  найдётся такой номер  $N_M$ , что все значения  $x_n$  при  $n > N_M$

удовлетворяют неравенству  $|x_n| > M$

Например, последовательности  $x_n = n$ ,  $y_n = -n$ ,  $z_n = (-1)^n n$  являются бесконечно большими

**Замечание.** Следует различать неограниченную и бесконечно большую последовательности. Например, последовательность  $1, 0, 3, 0, 5, 0, \dots$  является неограниченной сверху, но она не является бесконечно большой.

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется сходящейся. В противном случае — расходящейся. Последовательность  $\{x_n\}$  называется неубывающей, если  $x_n \leq x_{n+1}$  для любого  $n$ . Если  $x_n \geq x_{n+1}$ , — то это невозрастающая последовательность. Невозрастающая и неубывающая последовательности называются монотонными. Если неравенства строгие ( $x_n < x_{n+1}$ ,  $x_n > x_{n+1}$ ), то последовательности называются строго монотонными.

**Теорема 2.** Монотонная ограниченная последовательность сходится.

**Доказательство.** Пусть последовательность неубывающая, т.е.  $x_n \leq x_{n+1}$ . Согласно теореме 3 §1 последовательность  $\{x_n\}$  имеет точную верхнюю грань  $\sup x_n = M$ . По определению точной верхней грани  $x_n \leq M$  для любого  $n$  и  $M - x_{n_0} < \varepsilon$ , где  $x_{n_0}$  — некоторый член последовательности. Поскольку последовательность неубывающая, то последнее неравенство будет выполняться для всех  $n \geq n_0$ , т.е.  $|M - x_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$ . А это означает, что  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Доказательство аналогично для невозрастающей последовательности. Теорема доказана.

### § 3. Предел функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в окрестности точки  $x = a$  за исключением, быть может, самой точки  $a$ . Точка  $a$  может быть и бесконечно удалённой.

**Опр.1.(Гейне).** Число  $b$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ , если для любой сходящейся к  $a$  последовательности аргумента  $\{x_n\}$  соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $b$ .

Пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , или  $f(x) \rightarrow b$  при  $x \rightarrow a$ .

Если предел функции существует, то он единственный. Это следует из единственности предела последовательности.

**Пример 1.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ .

**Решение.** Пусть предел существует. Выберем две последовательности аргумента, сходящиеся к нулю:

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{и} \quad x'_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad \text{Соответствующие}$$

последовательности значений функции следующие:

$$\begin{aligned} y_n &= \sin \frac{1}{x_n} = \\ &= \sin \pi n = 0, \quad y'_n = \sin \frac{1}{x'_n} = \sin \left( 2\pi n + \frac{\pi}{2} \right) \approx 1, \end{aligned}$$

т.е. обе последовательности являются постоянными. Поскольку пределом постоянной является сама постоянная (см. §2), то в точке  $x = 0$  мы получим два предела функции 0 и 1, чего не может быть. Следовательно наше предположение о существовании предела в точке  $x = 0$  не верно. Данная функция не имеет предела в нуле.

**Опр. 2. (Коши).** Число  $b$  называется пределом функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta_\varepsilon > 0$  такое, что для всех  $x \in O(a, \delta_\varepsilon)$  имеет место

неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ . ( $\forall \varepsilon > 0 \exists O(a, \delta_\varepsilon) x \in O(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow y \in O(b, \varepsilon)$ ).

**Пример 2.** Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

**Решение.** По определению Коши  $|\cos x - 1| < \varepsilon$ , если  $|x - 0| = |x| < \delta_\varepsilon$ . Если найдем  $\delta_\varepsilon$  для любого  $\varepsilon > 0$  такое, что из второго неравенства будет следовать первое, то задача будет решена.

$$|\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 < \varepsilon \Rightarrow |x| < \sqrt{2\varepsilon}.$$

Положим  $\delta_\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon}$ , тогда для всех  $|x| < \delta_\varepsilon$  выполняется неравенство  $|\cos x - 1| < \varepsilon$  и задача решена.

**Упражнение.** Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ .

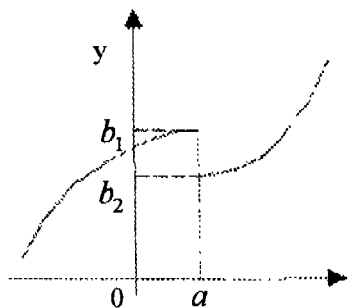
Замечание. Выше приведено два определения предела функции, однако определение должно быть единственным. Поэтому, если за определение взять формулировку Гейне, то формулировка Коши будет теоремой, и её можно доказать. И наоборот.

**Опр. 3.** Функция  $y = f(x)$  называется бесконечно большой в точке  $x = a$ , если существует такая  $\delta$ -окрестность этой точки, что для  $\forall x \in O(a, \delta) |f(x)| > M$ , где  $M > 0$  – любое действительное число. Точка  $a$  может быть и бесконечно

удалённой. ( $\exists M > 0 \exists \delta > 0 (x \in O(a, \delta) \Rightarrow |f(x)| > M)$ ).

Если  $x \rightarrow a$ , оставаясь меньше  $a$ , то предел функции  $y = f(x)$  в точке называется левым. Пишут  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$ . Если  $x \rightarrow a$ ,

оставаясь больше  $a$ , то предел называют правым. Пишут



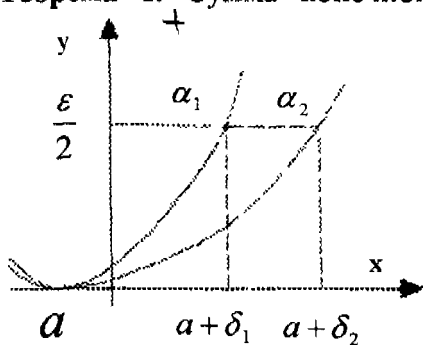
$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$ . Правый и левый пределы называют односторонними пределами. Если  $b_1 \neq b_2$ , то функция в точке  $x = a$  предела не имеет, а имеет только односторонние пределы. Если  $b_1 = b_2$ , то функция имеет в точке  $a$  предел. И наоборот, если функция имеет предел в точке  $x = a$ , то она имеет равные между собой левый и правый пределы.

### § 4. Бесконечно малые и их свойства

**Опр.** Функция  $\alpha(x)$  называется бесконечно малой в точке  $x = a$ , если её предел в этой точке равен нулю,  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

С помощью  $\varepsilon$ ,  $\delta$  это можно записать так:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$   
 $(x \in O(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon)$ .

† **Теорема 1.** Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.



**Доказательство.**

Докажем теорему для двух слагаемых  $\alpha_1(x)$  и  $\alpha_2(x)$ . По условию теоремы

$$|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } |x - a| < \delta_1,$$

$$|\alpha_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } |x - a| < \delta_2$$

Пусть  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , тогда  $|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $|\alpha_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ , если  $|x - a| < \delta$ . Т.к. неравенства одинакового смысла можно складывать, то имеем  $|\alpha_1| + |\alpha_2| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha_1 + \alpha_2| < \varepsilon$ , если

$|x-a| < \delta$ . Последняя запись означает, что  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) = 0$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** Произведение бесконечно малой в точке  $x = a$  функции  $\alpha(x)$  на ограниченную в этой точке функцию  $\varphi(x)$  есть функция бесконечно малая.

**Доказательство.** Запись  $\exists \delta_1 > 0, M > 0 (x \in O(a, \delta_1) \Rightarrow |\varphi(x)| < M)$  означает, что функция  $\varphi(x)$  ограничена в точке

$x = a$ . Запись  $\forall \frac{\varepsilon}{M} > 0 \exists \delta_2 > 0 (x \in O(a, \delta_2) \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M})$

означает, что  $\alpha(x)$  — бесконечно малая в точке  $x = a$ . В наименьшей из двух окрестностей точки  $x = a$  будут выполняться оба неравенства  $|\varphi(x)| < M$  и  $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ .

Перемножая неравенства, получим  $|\alpha(x) \cdot \varphi(x)| < \varepsilon \forall x \in O(a, \delta), \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ . Последняя запись означает, что произведение  $\alpha(x) \cdot \varphi(x)$  есть бесконечно малая в точке  $x = a$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Если  $\alpha(x)$  — бесконечно малая в точке  $x = a$  и не обращается в нуль в некоторой окрестности этой точки, то  $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$  — бесконечно большая функция в этой точке. (Без доказательства).

## § 5. Основные теоремы о пределах

**Лемма.** Для того, чтобы число  $b$  было пределом функции  $f(x)$  в точке  $x = a$ , необходимо и достаточно, чтобы разность  $f(x) - b$  была бесконечно малой в этой точке.

**Доказательство.** Обозначим разность  $f(x) - b$  через  $\alpha(x)$ , т.е.  $f(x) - b = \alpha(x)$ . Если  $b$  — предел функции  $f(x)$ , то

$|f(x) - b| = |\alpha(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in O(a, \delta)$ . Но это означает, что  $\alpha(x)$  является бесконечно малой в точке  $x = a$ . Необходимость доказана. Если  $\alpha(x)$  – бесконечно малая, то  $|\alpha(x)| = |f(x) - b| < \varepsilon \quad \forall x \in O(a, \delta)$ . Последняя запись означает, что  $b$  является пределом функции  $f(x)$  в точке  $x = a$ . Достаточность доказана.

**Теорема 1.** Пусть функции  $U(x)$  и  $V(x)$  определены в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x = a$  за исключением, быть может, самой точки  $x = a$ . Если существуют пределы функций  $U(x)$  и  $V(x)$  в точке  $x = a$ , то существуют и следующие пределы:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} (U(x) + V(x)) \approx \lim_{x \rightarrow a} U(x) + \lim_{x \rightarrow a} V(x)$ ,
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} (U(x) \cdot V(x)) \approx \lim_{x \rightarrow a} U(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} V(x)$ ,
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} U(x)}{\lim_{x \rightarrow a} V(x)}$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} V(x) \neq 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} U(x) = b_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} V(x) = b_2$ . Тогда

согласно лемме

$$U(x) = b_1 + \alpha(x), \quad V(x) = b_2 + \beta(x). \quad (1)$$

Учитывая (1), запишем  $\frac{U(x)}{V(x)} = \frac{b_1 + \alpha(x)}{b_2 + \beta(x)} = \frac{b_1}{b_2} +$

$$+ \left( \frac{b_1 + \alpha(x)}{b_2 + \beta(x)} - \frac{b_1}{b_2} \right) = \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2 \alpha(x) - b_1 \beta(x)}{b_2 (b_2 + \beta(x))}, \text{ или}$$

$$\frac{U(x)}{V(x)} = \frac{b_1}{b_2} + \gamma(x) \quad (4), \text{ где } \gamma(x) = \frac{b_2 \alpha(x) - b_1 \beta(x)}{b_2 (b_2 + \beta(x))} -$$

бесконечно малая (согласно теоремам 1–3 предыдущего параграфа). Равенство (4) согласно лемме означает, что

$$\frac{b_1}{b_2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{U(x)}{V(x)} \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} U(x)}{\lim_{x \rightarrow a} V(x)}. \quad \text{Таким образом,}$$

третье утверждение теоремы доказано. Первое и второе утверждения доказываются аналогично. Доказать их самостоятельно.

Из второго утверждения теоремы вытекает следующее следствие: если  $V(x) = C = \text{const}$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (C U(x)) =$

$= C \lim_{x \rightarrow a} U(x)$ , т.е. постоянную можно выносить за знак предела.

Теорема 1 значительно облегчает нахождение пределов.

**Пример.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 2}$ .

**Решение.** Используя теорему 1, запишем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)} = \frac{\left(\lim_{x \rightarrow 1} x\right)^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 1} x + 5}{\lim_{x \rightarrow 1} x + 2} = \\ &= \frac{1 - 3 \cdot 1 + 5}{1 + 2} = 1. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** (О двух милиционерах). Пусть функции  $f(x)$ ,  $U(x)$ ,  $V(x)$  определены в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x = a$  за исключением, быть может, самой точки  $x = a$ .

Если  $U(x) \leq f(x) \leq V(x) \quad \forall x \in O(a, \delta_1)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} U(x) =$   
 $= \lim_{x \rightarrow a} V(x) = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

**Доказательство.** Согласно лемме  $U(x) = b + \alpha(x)$ ,  $V(x) = b + \beta(x)$ , где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – бесконечно малые в точке  $x = a$ , т.е.  $|\alpha(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in O(a, \delta_2)$  и  $|\beta(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in O(a, \delta_3)$ . Данное в условии теоремы неравенство  $b + \alpha(x) \leq$



$\leq f(x) \leq b + \beta(x)$  (5) будет, очевидно, выполняться в наименьшей из трех окрестностей точки  $x = a$ , т.е.  $\forall x \in O(a, \delta)$ ,  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ .

Перепишем неравенство (5) так:

$-\varepsilon < \alpha(x) \leq f(x) - b \leq \beta(x) < \varepsilon \quad \forall x \in O(a, \delta)$ , или

$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \forall x \in O(a, \delta)$ .

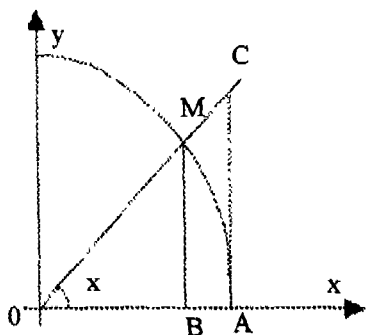
Последнее неравенство означает, что  $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Теорема доказана.

**Теорема 3.** (Правило замены переменной). Если существует предел функции  $F(y)$  в точке  $y_0$  и существует предел функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , причем  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , то

$\lim_{x \rightarrow x_0} F(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} F(y)$ . (Без доказательства).

## § 6. Замечательные пределы



Рассмотрим функцию

$y = \frac{\sin x}{x}$ . Она не определена

в точке  $x = 0$ , тем не менее предел её в этой точке существует и равен единице. Докажем это. Из чертежа при

$0 < x < \frac{\pi}{2}$  ясно, что  $S_1 < S_2 <$

$< S_3$  (1), где  $S_1$  и  $S_3$  – площади треугольников  $OMB$  и  $OAC$ , а  $S_2$  – площадь кругового сектора. Радиус окружности будем считать равным единице. Тогда, выражая площади через угол  $x$ , неравенство (1) перепишем так:

$\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ , или

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}. \quad (2)$$

В неравенстве (2) все функции являются четными, поэтому оно верно и для отрицательных  $x$ , т.е. при  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $x \neq 0$ . Устремляя  $x$  к нулю и пользуясь теоремой о двух милиционерах, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (3)$$

Формулу (3) называют первым замечательным пределом. Прежде, чем перейти ко второму замечательному пределу, приведем формулу бинорма Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (4)$$

где  $C_n^0 = 1$ ,  $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k.$$

Формулу (4) можно доказать методом математической индукции. Мы её докажем позже другим методом.

Рассмотрим последовательность  $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Используя формулу бинорма Ньютона, получим

$$\begin{aligned} y_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \\ &+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \quad (5) \end{aligned}$$

Из (5) видно, что последовательность  $\{y_n\}$  монотонно возрастающая, т.к. при замене  $n$  на  $n+1$  каждое слагаемое

в (5) возрастает и добавляется еще одно положительное слагаемое.

Покажем теперь, что эта последовательность ограничена сверху. Действительно,

$$\begin{aligned}
 y_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\
 &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

(Сначала мы отбросили скобки меньше единицы, и результат возрос. Затем учли, что  $k! \geq 2^{k-1}$  и воспользовались формулой суммы членов убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{1}{2}$ ).

Итак, последовательность  $\{y_n\}$  монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, имеет предел (см. Теорему 2 §2). Этот предел называют числом  $e$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.
 \tag{7}$$

Число  $e$  является иррациональным,  $e = 2,71$

Рассмотрим теперь функцию  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  и докажем, что она имеет предел при  $x \rightarrow +\infty$  равный  $e$ . Для любого положительного действительного числа  $x$  имеет место неравенство  $n \leq x < n + 1$ . Для обратных величин этого неравенства получим

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Если левую часть последнего неравенства возвести в степень  $n$ , среднюю – в степень  $x$ , а правую – в степень  $n + 1$ , то неравенство только усилится, т.е.

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (8)$$

Легко убедиться, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ .

Поэтому из (8) по теореме о двух милиционерах следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (9)$$

Покажем теперь, что  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left| \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-t}\right)^{-t} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-t}{-1-t}\right)^{-1-t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right) \right) = e. \end{aligned}$$

Последняя формула и формула (9) называются вторым замечательным пределом.

Можно доказать, что

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

## § 7. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

**Опр.1.** Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если предел её в этой точке равен значению функции в этой точке, т.е. если

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad (1)$$

**Пример 1.** Покажем, что функция  $y = \cos x$  непрерывна в точке  $x_0 = 0$ . Действительно,  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  (см. пр.2 §3) и  $\cos 0 = 1$ , т.е. предел функции равен её значению. Согласно определению функция  $y = \cos x$  непрерывна в точке  $x_0 = 0$ .

**Следствие 1** Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то к пределу можно перейти под знаком функции, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) \quad (2)$$

Действительно, поскольку  $x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} x$ , то  $f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , т.к. функция непрерывна. Следствие доказано.

Разность  $x - x_0 = \Delta x$  называют приращением аргумента, а разность  $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$  — приращением функции в точке  $x = x_0$ .

**Следствие 2.** Если функция непрерывна, то бесконечно малому приращению аргумента  $\Delta x$  соответствует бесконечно малое приращение  $\Delta y$ , т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (3)$$

Действительно, перепишем равенство (1) так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (4)$$

Следствие доказано.

**Следствие 3.** Если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то функция непрерывна.

Чтобы доказать это следствие, достаточно равенство (4) прочитать справа налево.

Если требования непрерывности функции в точке  $x_0$  не выполняются, т.е. функция не определена в точке  $x_0$  или предел функции в точке  $x_0$  не существует, или существует, но не равен значению функции в этой точке, то функция называется разрывной в точке  $x_0$ , а сама точка  $x_0$  называется точкой разрыва функции.

**Опр. 2.** Если функция непрерывна в каждой точке интервала  $(a, b)$ , то она называется непрерывной на этом интервале. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ , то функция называется непрерывной в точке  $x_0$  слева. Аналогично при  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$  — непрерывной в точке  $x_0$  справа.

**Опр. 3.** Если функция непрерывна в каждой точке интервала  $(a, b)$ ,  $a < b$  и в точке  $x = a$  она непрерывна справа, а в точке  $x = b$  — слева, то она называется непрерывной на отрезке  $[a, b]$ .

**Пример 2.** Доказать, что функция  $y = \sin x$  непрерывна в каждой точке своей области определения.

**Доказательство.** Пусть  $\Delta x$  — приращение аргумента в произвольной точке  $x_0$  области определения функции.

Тогда

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos(x_0 + \frac{1}{2} \Delta x).$$

Поскольку  $\sin \frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  (см. упражнение в §3 гл.2), то и  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  (см. теорему 2 §4 гл.2).

Тогда согласно следствию 3 функция  $y = \sin x$  непрерывна в точке  $x_0$ .

Что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать, что все основные элементарные функции непрерывны в своих областях определения. При этом, под основными элементарными функциями понимают следующие пять функций:

- 1) степенную  $y = x^\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ;
- 2) показательную  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- 3) логарифмическую  $y = \log_a x$ ,  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- 4) тригонометрические  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ;
- 5) обратные тригонометрические  $y = \arcsin x$ ,  
 $y = \arccos x$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

**Пример 3.** Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \frac{\sin x}{x} \text{ в точке } x_0 = 0.$$

**Решение.** Поскольку точка  $x_0 = 0$  не входит в область определения этой функции, то она терпит разрыв в этой точке, не смотря на то, что имеет предел в этой точке.

**Пример 4.** Исследовать на непрерывность функцию  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  в точке  $x_0 = 0$ .

**Решение.**  $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$  Очевидно,  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$ ,

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +1$ , а  $f(0) = 0$ . Поэтому эта функция разрывна в точке  $x_0 = 0$ .

**Пример 5.** Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \sin \frac{1}{x} \text{ в точке } x_0 = 0.$$

**Решение.** Т.к. функция не определена в точке  $x_0 = 0$  то она терпит в ней разрыв. Отметим, что эта функция не имеет предела в точке  $x_0 = 0$  (см. пр. 1 §3 гл.2).

**Пример 6.** Исследовать на непрерывность функцию  $y = \frac{1}{x}$  в точке  $x_0 = 0$ .

**Решение.** Поскольку функция не определена в точке  $x_0 = 0$ , то она разрывна в точке. Заметим, что  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \pm\infty$ .

**Пример 7.** Исследовать на непрерывность функцию Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное.} \end{cases}$$

**Решение.** Функция определена в каждой точке числовой оси. Пусть  $x_0$  – произвольная точка числовой оси. Выберем две последовательности аргумента  $\{x_n\}$  и  $\{x'_n\}$ , сходящиеся к  $x_0$ . Пусть члены первой последовательности рациональные числа, а второй иррациональные. Тогда соответствующие последовательности значений функции  $f(x_n) = 1$  и  $f(x'_n) = 0$  сходятся к единице и к нулю соответственно. А это означает, что данная функция не имеет предела. Данная функция разрывная в каждой точке числовой оси.

**Опр. 4.** Если функция имеет предел в точке  $x_0$ , но он не совпадает со значением функции в этой точке или функция не определена в этой точке, то разрыв называется устранимым.

Если функция имеет в точке  $x_0$  односторонние пределы, не равные между собой, то  $x_0$  называется точкой разрыва



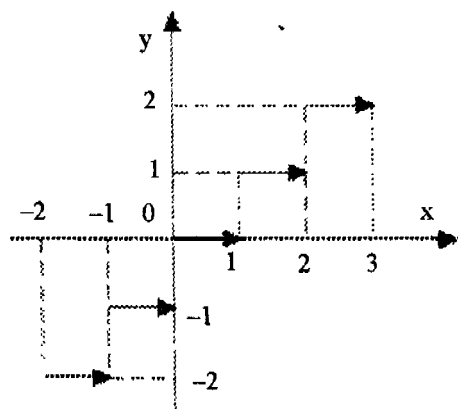
первого рода. При этом  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) - \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = h$  называется скачком функции в точке  $x_0$ .

Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечный в точке  $x_0$ , то эта точка разрыва второго рода.

Например, точка  $x_0$  в примере 3 является точкой устранимого разрыва, а в примере 4 – разрывом первого рода. Разрыв в примерах 5, 6, 7 второго рода.

**Опр.5.** Функция непрерывная на отрезке  $[a, b]$  за исключением конечного числа точек этого отрезка, в которых она терпит разрывы первого рода, называется кусочно-непрерывной на этом отрезке. Функция называется кусочно-непрерывной на всей числовой оси, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке этой оси.

**Пример 8.** Исследовать на непрерывность функцию  $y = E(x)$ , целую часть величины  $x$ .



**Решение.** Очевидно, функция терпит разрывы при  $x \in Z$ . В остальных точках она непрерывна. При этом  $E(0) = 0$ ,  $E(\pm n) = \pm n$ ,  $n \in N$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \pm n-0} E(x) = \pm n - 1 \neq E(\pm n)$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \pm n+0} E(x) = \pm n = E(\pm n)$ .

Таким образом, функция имеет точки разрыва только первого рода, в них она непрерывна справа. Это пример кусочно-непрерывной функции на всей числовой оси.

## § 8. Свойства непрерывных функций

**Теорема 1.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ , то в этой точке непрерывны следующие функции:

- 1)  $c f(x)$ ,  $c g(x)$ ,  $c = \text{const}$ ,
- 2)  $f(x) \pm g(x)$ ;
- 3)  $f(x) \cdot g(x)$ ;
- 4)  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ,  $g(x_0) \neq 0$ .

**Доказательство.** Докажем третье утверждение теоремы. Поскольку предел произведения равен произведению пределов, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0). \quad (1)$$

Равенство (1) и означает непрерывность функции  $f(x) \cdot g(x)$ . Остальные утверждения доказываются аналогично.

Рассмотрим две функции  $y = g(x)$  и  $f(y)$ . Сложная функция  $f(g(x))$  называется суперпозицией данных функций. Например,  $y = \lg(\sin x^3)$  — суперпозиция трех функций: логарифмической, тригонометрической и степенной.

**Теорема 2.** Если функция  $y = g(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , а функция  $f(y)$  непрерывна в точке  $y_0 = g(x_0)$ , то сложная функция  $f(g(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**Доказательство.** Поскольку функция  $y = g(x)$  непрерывна, то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} y = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

Используя первое следствие §7, получим

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(\lim_{y \rightarrow y_0} y) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) = f(g(x_0)).$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) \quad (2)$$

Равенство (2) и означает непрерывность сложной функции в точке  $x_0$ .

Замечание. Теорема 2 даёт правило замены переменных при вычислении пределов непрерывных функций

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \left. \begin{array}{l} y = g(x) \\ x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 = g(x_0) \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) \quad (3)$$

**Теорема 3.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) \neq 0$ , то существует окрестность  $x_0$ , в которой функция  $f(x)$  сохраняет свой знак (без доказательства).

Функцию называют элементарной, если она получается путём конечного числа арифметических операций и суперпозиций пяти основных элементарных функций.

Например,  $y = \sin \frac{1}{x}$ ,  $y = x^2 + e^x$  — элементарные функции,

а функции  $y = \operatorname{sgn} x$ ,  $y = E(x)$ ,  $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$  не являются

элементарными. Функция Дирихле также неэлементарная.

Поскольку все пять основных элементарных функций являются непрерывными в своих областях определения, то из теорем 1,2 вытекает следующее следствие: всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения. Заметим, что для неэлементарных функций это утверждение не справедливо.

**Теорема 4.** Всякая непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  ограничена этом отрезке, достигает на нём своих наибольшего и наименьшего значений  $M = \sup f(x)$ ,  $m =$

$\inf f(x)$  и принимает на нём все промежуточные значения из отрезка  $[m, M]$ . (Без доказательства).

**Замечание.** Для функции, непрерывной на интервале  $(a, b)$ , теорема 4 не справедлива. Например, функция  $y = \frac{1}{x}$  непрерывна на интервале  $(0, 1)$ , но не ограничена на нём и не достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

**Следствие.** Если непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  принимает на его концах значения разных знаков, то найдётся хотя бы одна точка  $x_0 \in (a, b)$ , в которой функция обращается в нуль, т.е.  $f(x_0) = 0$ . Доказательство очевидно.

Следствие теоремы 4 часто используется для приближенного нахождения корней уравнения.

**Пример.** Найти корень уравнения  $\sqrt{x} + 2 \cos \pi x = 0$ .

**Решение.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \sqrt{x} + 2 \cos \pi x$ . Она элементарная, поэтому непрерывная для всех  $x \geq 0$ .

Вычислим

$$f(0) = 2 \text{ и}$$

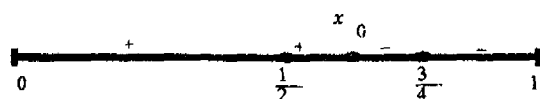
$$f(1) = -1.$$

Т.к. значения функции

разных знаков, то корень уравнения  $x_0$  лежит в интервале  $(0, 1)$ , т.е.  $0 < x_0 < 1$ . Разделим отрезок  $[0, 1]$  пополам и

вычислим  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Отсюда следует, что  $\frac{1}{2} < x_0 < 1$ .

Разделим отрезок  $[\frac{1}{2}, 1]$  пополам и вычислим  $f\left(\frac{3}{4}\right) =$



$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} < 0$ . Отсюда следует, что  $\frac{1}{2} < x_0 < \frac{3}{4}$ , т.е. мы уже вычислили корень уравнения с точностью до 0,25. Продолжая этот процесс можно вычислить корень с любой наперед заданной точностью.

## § 9. Сравнение функций. Асимптотические равенства

Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – бесконечно малые функции в точке  $x_0$ .

**Опр.1.** Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , то функцию  $\alpha(x)$  называют бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с  $\beta(x)$  и пишут  $\alpha = o(\beta)$  при  $x \rightarrow x_0$ .

**Пример 1.** Сравнить бесконечно малые  $\alpha(x) = x^2$  и  $\beta(x) = \sin x$  в точке  $x_0 = 0$ .

**Решение.** Найдём  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = 0 \cdot 1 = 0$ .

Поэтому  $x^2 = o(\sin x)$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Опр.2.** Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$ , то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называют бесконечно малыми одного порядка малости и пишут  $\alpha = O(\beta)$  при  $x \rightarrow x_0$ . В частности, если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = c \neq 0$ ,

то говорят, что  $\alpha(x)$  имеет  $k$ -й порядок малости по сравнению с  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . Действительное число  $k$  называют порядком малости, а сравнивают чаще всего с функцией  $\beta(x) = x - x_0$ . Например, бесконечно малая в

нуле функция  $\alpha(x) = 2x^5 + 3\sin^2 x^2$  имеет четвертый порядок малости по сравнению с  $\beta(x) = x$ . Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 + 3\sin^2 x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x + 3 \left( \frac{\sin x^2}{x^2} \right)^2 \right) = 3.$$

**Опр.3.** Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ ,  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются

эквивалентными, или асимптотически равными бесконечно малыми в точке  $x_0$ . Пишут  $\alpha \sim \beta$  при  $x \rightarrow 0$ . Например,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0.$$

**Пример 2.** Доказать, что  $\arcsin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Решение.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \begin{matrix} \arcsin x = y \\ x = \sin y \end{matrix} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$ . Что и

требовалось доказать.

**Пример 3.** Доказать, что  $\ln(1+x) \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Решение.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left| \begin{matrix} \frac{1}{x} = y \\ y \rightarrow \infty \end{matrix} \right| =$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y = \ln \left( \lim_{y \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{y} \right)^y \right) = \ln e = 1 \Rightarrow \ln(1+x) \sim x.$$

Заметим, что мы доказали третье равенство §6, приведённое в том параграфе без доказательства.

Можно доказать следующие свойства эквивалентных бесконечно малых в некоторой точке  $x_0$ :

- 1) если  $\alpha \sim \beta$ , то  $\beta \sim \alpha$ ;
- 2) если  $\alpha \sim \beta$ , а  $\beta \sim \gamma$ , то  $\alpha \sim \gamma$ ;
- 3) если  $\alpha \sim \beta$ , то  $\alpha = \beta + o(\beta)$ ;
- 4) если  $\alpha = \beta + o(\beta)$ , то  $\alpha \sim \beta$ .

**Опр.4.** Если  $\alpha(x) = A(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k)$ ,  $A \neq 0$ ,  $k > 0$ ,

то выражение  $A(x-x_0)^k$  называется главной степенной частью бесконечно малой функции  $\alpha(x)$  в точке  $x = x_0$ .

**Пример 4.** Выделить главную степенную часть бесконечно малых функций  $\alpha(x) = \ln(1+2\sqrt{x}+x^3)$ ,

$\beta(x) = \arcsin \sqrt{x} + 5x^2$  в точке  $x_0 = 0$ .

**Решение.** Очевидно,  $\alpha(x) \sim 2\sqrt{x} + x^3 \sim 2\sqrt{x}$ ,

$\beta(x) \sim \sqrt{x} + 5x^2 \sim \sqrt{x}$ , поэтому  $\alpha(x) = 2\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ ,

$\beta(x) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ . Главные степенные части:  $2x^{\frac{1}{2}}$  и  $x^{\frac{1}{2}}$ .

**Теорема.** Если  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ,  $\beta(x) \sim \beta_1(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  и

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$  существует, то  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ .

**Доказательство.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta_1} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1}{\alpha} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\beta_1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}. \text{ Теорема доказана.}$$

Теоремой часто пользуются при нахождении пределов функции.

**Пример 5.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2\sqrt{x}+x^3)}{\arcsin \sqrt{x} + 5x^2}$ .

**Решение.** Воспользуемся теоремой и результатом примера 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2\sqrt{x}+x^3)}{\arcsin \sqrt{x} + 5x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2.$$

**Замечание.** Аналогично сравниваются и бесконечно большие функции в некоторой точке.

## ГЛАВА 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

### § 1. Понятие производной. Геометрический и физический смыслы производной

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

**Опр.** Если предел отношения  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  при  $x \rightarrow x_0$

существует, то его называют производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначают  $f'(x_0)$ . Сам процесс нахождения производной называют дифференцированием функции.

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Если при дифференцировании берутся только левый или только правый пределы, то и соответствующие производные называют левой или правой. Их обозначают соответственно  $f'_-(x_0)$  и  $f'_+(x_0)$ .

Если левая и правая производные совпадают, то функция имеет производную  $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ . Если односторонние производные в точке  $x_0$  разные или хотя бы одна из них не существует, то и производная в точке  $x_0$  не существует.

Если обе односторонние производные в точке  $x_0$  обращаются в бесконечность, то говорят, что в точке  $x_0$  существует бесконечная производная.



В дальнейшем говоря о существовании производной, будем предполагать, её конечной, а случай бесконечной производной будем специально оговаривать.

**Замечание.** В некоторых учебниках признаётся существование бесконечной производной только в случае, когда односторонние бесконечные производные одного знака.

**Пример 1.** Найти производную в точке  $x = 0$  функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

**Решение.** Найдем односторонние производные в точке  $x = 0$ .

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = 1, \quad f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x} = 0. \text{ Поскольку}$$

$f'_-(0) \neq f'_+(0)$ , то функция не имеет производной в нуле.

**Пример 2.** Найти производную в точке  $x = 0$  функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + 1 + 2x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

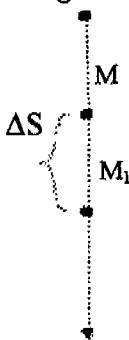
**Решение.** Согласно определению производной

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} + 1 + 2x - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{x} + 2 \right) = 2.$$

**Пример 3.** Пусть материальная точка свободно падает в пустоте без начальной скорости. Найти скорость падения точки в произвольный момент времени  $t$ .

**Решение.** Путь, пройденный точкой за время  $t$ , как известно, определяется формулой  $S = \frac{1}{2}gt^2$ .

Пусть в момент времени  $t$  точка находилась в положении  $M$ , а в момент времени  $t + \Delta t = t_1$  в положении  $M_1$ . Тогда за время  $\Delta t$  она прошла



путь  $MM_1 = \Delta S = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g (2t\Delta t + (\Delta t)^2)$ .

Средняя скорость движения на участке  $MM_1$  будет следующей

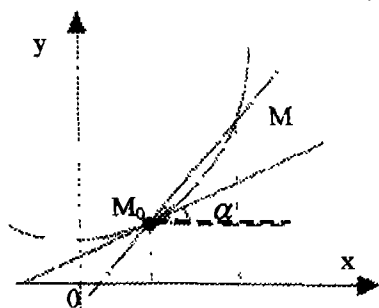
$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2} g\Delta t$$

Скоростью точки в момент времени  $t$  назовём предел средней скорости на участке  $MM_1$ , когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , а  $M_1 \rightarrow M$ , т.е.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( gt + \frac{1}{2} g\Delta t \right) = gt. \quad (1)$$

Из (1) следует, что скорость движения есть производная пути  $S(t)$  по времени, т.е.  $v = S'(t)$ .

Обобщая пример 3, можно сказать, что физической интерпретацией производной  $f'(t)$  является скорость изменения процесса, описываемого функцией  $f(t)$ .



Возьмём точки  $M_0$  и  $M$  на графике функции  $y = f(x)$  и проведём секущую  $M_0M$ . Если точка  $M$  по кривой приближается к точке  $M_0$ , то секущая будет поворачиваться вокруг точки  $M_0$ . Предельное положение секущей, когда точка  $M$

сольётся с точкой  $M_0$  называют касательной к кривой  $f(x)$  в точке  $M_0$ .

**Пример 4.** Найти угловой коэффициент касательной

$k = tg\alpha$  к кривой  $y = f(x)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$ .

**Решение.** Угловой коэффициент секущей, проходящей через точки  $M_0(x_0, y_0)$  и  $M_1(x, y)$ , очевидно, равен

$$k_1 = tg\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Т.к. предельное положение секущей является касательной, то

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \quad (2)$$

Из (2) видно, что с точки зрения геометрии производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  есть угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$ .

Запишем уравнение касательной

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \quad (3)$$

Если функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  бесконечную производную, то касательная к кривой будет вертикальной, её уравнение  $x = x_0$ . Прямая, проходящая через точку касания  $M_0$  перпендикулярно касательной, называется нормалью к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке. Уравнение нормали следующее (см. 11 §7 гл. 1):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (4)$$

**Теорема 1.** Функция, имеющая производную в точке  $x_0$ , непрерывна в этой точке.

**Доказательство.** Согласно лемме §5 гл.2 из равенства

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ следует равенство } \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x),$$

где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ , или

$$\Delta y = f'(x_0) \Delta x + \alpha(x) \Delta x. \quad (5)$$

Из (5) видно, что при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ , а это и означает непрерывность функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Теорема доказана.

**Следствие.** В точке разрыва функция не имеет производной.

**Доказательство** (от противного). Пусть в точке разрыва производная существует. Тогда согласно доказанной выше теореме функция непрерывна в ней. Получим противоречие, следствие доказано.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ , а множеством её значений является отрезок  $[\alpha, \beta]$ . Если каждому  $y \in [\alpha, \beta]$  отвечает только одно значение  $x \in [a, b]$ , причём  $f(x) = y$ , то говорят что на  $[\alpha, \beta]$  задана функция обратная функции  $f(x)$ . Пишут  $x = f^{-1}(y)$ .

Например,  $y = 3x + 1$ ,  $x \in [0; 1]$ . Функция  $x = \frac{1}{3}(y-1)$ ,  $y \in [1; 4]$  – обратная данной. Не всякая функция имеет обратную, например, функция  $y = 1$ ,  $x \in [0; 1]$  обратной не имеет.

**Теорема 2.** Если функция  $y = f(x)$  строго монотонна и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она имеет обратную  $x = f^{-1}(y)$ , которая также строго монотонна и непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , где  $\alpha = f(a)$ ,  $\beta = f(b)$ . (Без доказательства).

Замечание. Требования теоремы 2 только достаточные, они не являются необходимыми. Например, функция

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x - \text{рациональное,} \\ 1+x, & \text{если } x - \text{иррациональное.} \end{cases}$$

разрывная и немонотонная, но имеет обратную

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{если } y - \text{рациональное,} \\ y-1, & \text{если } y - \text{иррациональное.} \end{cases}$$

**Теорема 3.** Если функция  $y = f(x)$  определена, непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки  $x_0$ , а её производная существует и отлична от нуля ( $f'(x_0) \neq 0$ ), то обратная функция  $x = f^{-1}(y)$  существует

в окрестности точки  $y_0$  и имеет производную в точке  $y_0$ , определяемую формулой

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (6)$$

**Доказательство.** Существование строго монотонной и непрерывной функции  $x = f^{-1}(y)$  в окрестности точки  $y_0 = f(x_0)$  гарантируется теоремой 2. Возьмём приращение  $\Delta y \neq 0$ . Тогда обратная функция  $x = f^{-1}(y)$  получит приращение  $\Delta x = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)$ . Причём  $\Delta x \neq 0$  в силу строгой монотонности.

Запишем тождество 
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (7)$$

Если  $\Delta y \rightarrow 0$ , то и  $\Delta x \rightarrow 0$ , так обратная функция непрерывная. Переходя в тождестве (7) к пределу, получим

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = x'_y$  существует и выполняется

равенство (6). Теорема доказана.

Равенство (6) удобнее записать в виде

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad (6')$$

Индекс указывает по какой переменной берётся производная.

## § 2. Производные основных элементарных функций

1. Степенная функция  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Найдём приращение функции в произвольной точке  $x$ . Используя бином Ньютона, получим

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}\Delta x^2 + \dots + \Delta x^n.$$

Согласно определению производной

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}\Delta x + \dots + \Delta x^{n-1} \right) = \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом } (x^n)' = nx^{n-1}. \quad (1)$$

Можно убедиться, что формула (1) справедлива для любого действительного показателя.

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Частный случай, когда функция является постоянной  $y = c$ , рассмотрим отдельно. Очевидно,  $\Delta y = 0$  для любого  $\Delta x$ ,

тогда  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ , т.е. производная постоянной величины равна нулю.

2. Логарифмическая функция  $y = \log_a x$ ,  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Найдём приращение функции в произвольной точке области определения

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

$$\text{Составим отношение } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) =$$

$= \frac{1}{x} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ . Переходя к пределу и используя второй замечательный предел и непрерывность логарифмической функции, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \left. \frac{x}{\Delta x} = U \right|_{U \rightarrow \infty} = \\ &= \frac{1}{x} \lim_{U \rightarrow \infty} \log_a \left( 1 + \frac{1}{U} \right)^U = \frac{1}{x} \log_a \left( \lim_{U \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{U} \right)^U \right) = \\ &= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

Итак,  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ . (3)

В частности  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ . (4)

3. Показательная функция  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Поскольку показательная функция всюду монотонна, то имеет обратную  $x = \log_a y$ . Производная этой функции существует и определяется формулой (3).

$$x'_y = (\log_a y)' = \frac{1}{y \ln a}.$$

Согласно теореме 3 §1  $y'_x = \frac{1}{x'_y} = y \ln a = a^x \ln a$ .

Итак,  $(a^x)' = a^x \ln a$ . (5)

В частности  $(e^x)' = e^x$ . (6)

4. Тригонометрические функции  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ .

Найдём приращение функции в произвольной точке.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Используя первый замечательный предел и непрерывность функции  $y = \cos x$ , найдём предел отношения  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right) = \cos x.$$

Итак,  $(\sin x)' = \cos x$ . (7)

**Упражнение.** Доказать, что  $(\cos x)' = -\sin x$ . (8)

5. Обратные тригонометрические функции  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $x \in [-1; 1]$ .

Функция  $y = \arcsin x$  строго монотонна и непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$ . Поэтому имеет обратную  $x = \sin y$ ,  $y \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ , производная которой определяется формулой (7).

$$x'_y = (\sin y)' = \cos y.$$

Согласно теореме 3 §1  $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

Итак,  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ . (9)

Аналогично можно доказать, что

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (10)$$



$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (11)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (12)$$

### § 3. Правила дифференцирования

**Теорема 1.** Если каждая из функций  $U(x)$  и  $V(x)$  имеет производную в точке  $x$ , то сумма, разность, произведение и частное этих функций также имеют производную в этой точке, при этом

$$1) (U \pm V)' = U' \pm V',$$

$$2) (U \cdot V)' = U \cdot V' + V \cdot U',$$

$$3) \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}, \quad V(x) \neq 0.$$

Для примера докажем второе утверждение теоремы (первое и третье доказываются аналогично). Введём обозначения  $f(x) = U(x) \cdot V(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = U(x + \Delta x) \cdot V(x + \Delta x) - \\ &- U(x) \cdot V(x) = (U(x + \Delta x)V(x + \Delta x) - U(x + \Delta x)V(x)) + \\ &+ (U(x + \Delta x)V(x) - U(x)V(x)) = U(x + \Delta x)(V(x + \Delta x) - V(x)) + \\ &+ V(x)(U(x + \Delta x) - U(x)) = U(x + \Delta x) \cdot \Delta V + V(x) \cdot \Delta U. \end{aligned}$$

Составим отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  и перейдём к пределу.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( U(x + \Delta x) \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x} + V(x) \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x} \right) = \\ &= U(x) \cdot V'(x) + V(x) \cdot U'(x). \end{aligned}$$

Т.к. предел правой части последнего равенства существует, то существует предел и левой части, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) = (U(x)V(x))' = U(x) \cdot V'(x) + V(x) \cdot U'(x).$$

Теорема доказана.

**Следствие.** Постоянный множитель можно выносить за знак производной. Действительно,  $(CU)' = C U' + C' U = C U'$ , т.к. производная постоянной величины равна нулю.

**Пример 1.** Найти производные гиперболических функций  $y = \operatorname{sh} x$ ,  $y = \operatorname{ch} x$ .

**Решение.**  $(\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right)' = \frac{1}{2} \left( (e^x)' - \left( \frac{1}{e^x} \right)' \right) =$

$$= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x. \quad (\text{Сначала воспользовались первым утверждением теоремы, затем - третьим}).$$

Аналогично можно найти, что  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ .

**Пример 2.** Найти производную функции  $y = \operatorname{tg} x$ .

**Решение.**  $(\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = 1 +$

$$+ \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \text{Аналогично найдем } (thx)' = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} =$$

$$= 1 - th^2 x = \frac{1}{ch^2 x}.$$

Рассмотрим теперь правило дифференцирования сложной функции, являющейся суперпозицией двух функций  $U = g(x)$  и  $f(U)$ , так что

$$y = f(U) = f(g(x)) = F(x).$$

Для функции  $F(x)$  величина  $U = g(x)$  является промежуточным аргументом, а переменная  $x$  — окончательным аргументом.

**Теорема 2.** Если производные  $g'(x_0)$  и  $f'(U_0)$  существуют соответственно в точках  $x_0$  и  $U_0 = g(x_0)$ , то существует и производная сложной функции  $y = F(x)$  в точке  $x_0$ , причём

$$y'_x = y'_U \cdot U'_x. \quad (1)$$

**Доказательство.** Дадим приращение аргументу  $\Delta x$  в точке  $x_0$ . Тогда функция  $U = g(x)$  получит в этой точке приращение  $\Delta U$ , а функция  $y = f(U)$  в свою очередь получит приращение  $\Delta y$  в точке  $U_0 = g(x_0)$ . Поскольку функция  $y = f(U)$  по условию имеет производную, то  $y'_U =$

$= \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta U}$  существует. Используя лемму §5 гл.2, запишем

$\Delta y = y'_U \cdot \Delta U + \alpha \cdot \Delta U$ , где  $\alpha \rightarrow 0$  при  $\Delta U \rightarrow 0$ .

Составим отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_U \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x}$ . (2)

Поскольку функция  $U = g(x)$  по условию теоремы имеет производную в точке  $x_0$ , то она непрерывна в ней, следовательно при  $\Delta U \rightarrow 0$  и  $\Delta x \rightarrow 0$ . Переходя к пределу в (2),

получим  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_U \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} + \lim_{\Delta U \rightarrow 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} =$   
 $= y'_U U'_x + 0$ .

Из последнего равенства видно, что производная сложной функции существует и определяется формулой (1). Теорема доказана.

**Замечание.** Теорема верна и для суперпозиции большего числа функций.

**Пример 3.** Найти производную функции  $y = \ln(\sin 2x)$ .

**Решение.** Данная функция является суперпозицией трёх функций  $y = \ln U$ ,  $U = \sin z$ ,  $z = 2x$ . Обобщая формулу (1), запишем

$$y'_x = y'_U \cdot U'_z \cdot z'_x = \frac{1}{U} \cos z \cdot 2 = \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} = 2 \operatorname{ctg} 2x.$$

**Пример 4.** Найти производную функции  $y = \ln|x|$ .

**Решение.** Пусть  $x > 0$ , тогда  $y = \ln x$  и  $y' = \frac{1}{x}$ . Пусть  $x < 0$ ,

тогда  $y = \ln(-x) = \ln U$ ,  $U = -x$  — суперпозиция двух функций. Используя формулу (1), получим  $y'_x = y'_U \cdot U'_x =$   
 $= \frac{1}{U} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ .

Итак,  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

Рассмотрим теперь функцию, заданную неявно. Функция  $y(x)$  называется неявной (неявно заданной), если она задана уравнением, неразрешённым относительно  $y$ . Например,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y \geq 0$  — неявная функция (верхняя половина единичной окружности),  $y = \sqrt{1-x^2}$  — эта же функция, записанная в явном виде. Однако, не всегда неявную функцию можно записать в явном виде, например,  
 $x + y - e^{x-y} = 0$ .

В общем виде неявную функцию записывают в виде уравнения  $F(x, y) = 0$ . При этом предполагается, что  $y(x)$  такая функция, которая обращает это уравнение в тождество, т.е.  $F(x, y(x)) \equiv 0$ . Дифференцируя это тождество по переменной  $x$  как сложную функцию, найдём производную  $y'_x$  неявной функции. Рассмотрим это дифференцирование на примерах.

**Пример 5.** Найти производную неявной функции

$$x + y - e^{x \cdot y} = 0.$$

**Решение.**  $1 + y' - e^{x \cdot y}(1 - y') = 0$ ,  $y'(1 + e^{x \cdot y}) = e^{x \cdot y} - 1$ ,

$$y' = \frac{x + y - 1}{x + y + 1}.$$

**Пример 6.** Найти производную сложной показательной функции  $y = U^V$ , где  $U = U(x) > 0$ ,  $V = V(x)$ .

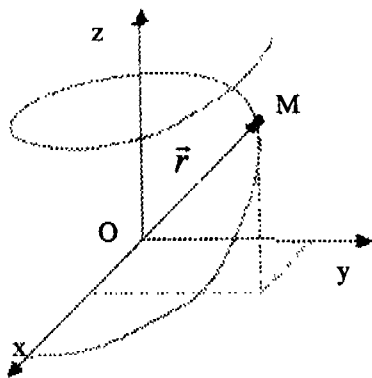
**Решение.** Логарифмируя данную функцию, получим  $\ln y = V \cdot \ln U$ . Дифференцируя результат как неявную

функцию, найдём  $\frac{y'}{y} = V' \ln U + \frac{V}{U} \cdot U'$ , или

$$y' = y(V' \ln U + \frac{V}{U} \cdot U') = U^V \cdot V' \ln U + V \cdot U^{V-1} \cdot U'.$$

Выражение  $(\ln y)' \approx \frac{y'}{y}$  называют логарифмической производной функции  $y(x)$ .

#### § 4. Дифференцирование векторной функции скалярного аргумента и параметрически заданной функции



Пусть  $E$  – некоторое множество действительных чисел. Если каждому  $t \in E$  поставить в соответствие геометрический вектор  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ , то говорят, что на  $E$  определена векторная функция (вектор-функция) скалярного аргумента  $t$ .

Если один конец вектора  $\vec{a}(t)$  закрепить в начале декартовой

системы координат, то при непрерывном изменении пара-

метра  $t$  второй его конец опишет некоторую кривую (годограф). Вектор, начало которого закреплено в начале координат, называют радиус-вектором и обозначают  $\vec{r}(t)$ . Очевидно,

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1)$$

Здесь  $x(t), y(t), z(t)$  – декартовы координаты конца радиус-вектора  $\vec{r}(t)$ , т.е. точки М.

Таким образом, если задана вектор-функция (1), то задана и кривая (годограф), поэтому уравнение (1) есть векторное параметрическое уравнение кривой в пространстве  $R_3$ . Оно эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (2)$$

Уравнения (2) называются параметрическими уравнениями кривой в пространстве. Мы уже знаем параметрические уравнения прямой в  $R_3$  (см. § 7 гл. 1),

параметрические уравнения эллипса и гиперболы в  $R_2$  (см. § 8 гл. 1). Приведем ещё два примера.

$$x = R \left( \omega t - \frac{a}{R} \sin \omega t \right), y = R \left( 1 - \frac{a}{R} \cos \omega t \right), t \geq 0. \quad (3)$$

$$x = R \cos \omega t, y = R \sin \omega t, z = vt, t \geq 0. \quad (4)$$

Плоская кривая (3) называется циклоидой. Если параметр  $t$  – время, то циклоида (3) является траекторией движения точки колеса радиуса  $R$ , отстоящей от центра колеса на расстоянии  $a$ . Колесо катится без скольжения по прямой линии. Пространственная кривая (4) называется винтовой линией. Это траектория движения точки, которая вращаясь вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ , одновременно совершает поступательное движение вдоль оси  $z$  со скоростью  $v$ .

Заметим, что уравнения (3) и (4) не только определяют траекторию движения точки, но и закон движения точки по этой траектории.

Такие понятия как предел, непрерывность, производная распространяются и на вектор-функцию.

**Опр.1.** Вектор  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  называется пределом вектор-функции  $\vec{r}(t)$  в точке  $t = t_0$ , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0. \quad (5)$$

Пишут  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ .

Поскольку

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2},$$

то из (5) следует

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0. \quad (6)$$

Равенства (6), очевидно, являются не только необходимыми, но и достаточными условиями существования предела

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0.$$

Если  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ , то равенство (6) будут необходимыми и достаточными условиями непрерывности вектора  $\vec{r}(t)$  в точке  $t_0$ .

**Опр.2.** Если существует  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} =$

$= \dot{\vec{r}}(t_0)$ , то этот предел называется производной вектор-функции в точке  $t_0$ . Здесь производная обозначается точкой.

Поскольку  $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k}$ , то из определения производной следует, что

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t) \vec{i} + \dot{y}(t) \vec{j} + \dot{z}(t) \vec{k}. \quad (7)$$

Если параметром  $t$  является время, то  $\dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$  — скорость движения точки по траектории. Поскольку  $|\Delta \vec{r}|$  является хордой кривой, а предельное положение хорды

является касательная, то скорость движения  $\vec{v}(t)$  направлена по касательной к траектории движения. Уравнение касательной к кривой в точке  $M_0$  с координатами  $x_0 = x(t_0)$ ,  $y_0 = y(t_0)$ ,  $z_0 = z(t_0)$ , можно записать так.

$$\frac{x-x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y-y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z-z_0}{\dot{z}_0} \quad (8)$$

Правила дифференцирования справедливы и для векторных функций. В частности

$$(\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t))' = \dot{\vec{r}}_1(t) \pm \dot{\vec{r}}_2(t),$$

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = (\dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2) + (\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_2),$$

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \dot{\vec{r}}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_2$$

Замечание. Понятие вектор-функции легко обобщается на  $n$ -мерное пространство  $R_n$

$$r(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), t \in E.$$

Аналогично вводятся понятия предела и производной

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r_0, \text{ если } \lim_{t \rightarrow t_0} \|r(t) - r_0\| = \lim_{t \rightarrow t_0} \rho(r, r_0) = 0, \quad (9)$$

$$\dot{r}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)) \quad (10)$$

Вернемся теперь к случаю плоской кривой  $x = \varphi(t)$ ,

$y = \psi(t)$ ,  $t \in E$ , заданной параметрически. Будем предполагать, что функция  $x = \varphi(t)$  имеет обратную

$t = \varphi^{-1}(x)$ . Тогда  $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$  — сложная функция аргумента  $x$ . Найдем ее производную. Используя правила дифференцирования сложной и обратной функций, получим

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (11)$$



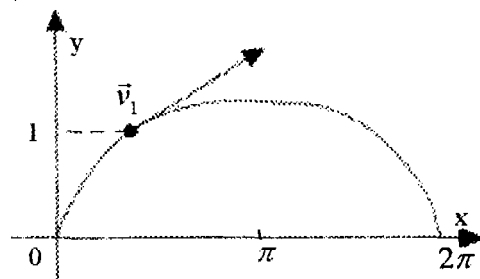
**Пример 1.** Задан закон движения точки  $\vec{r}(t) = (t - \sin t) \vec{i} + (1 - \cos t) \vec{j}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Определить:

1) траекторию движения,

2) скорость движения точки в момент времени  $t = \frac{\pi}{2}$ ,

3) максимальную точку траектории.

**Решение.** 1) Из условия задачи найдём  $x = t - \sin t$ ,  
 $y = 1 - \cos t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Это первая арка циклоиды (см. 3



при  $R = a = 1$ ,  $\omega = 1$ ).

2)  $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (1 - \cos t) \vec{i} + \sin t \vec{j}$  — скорость движения точки в произвольный момент времени  $t$ .

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2 \sin \frac{t}{2}, \quad v|_{t=\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}.$$

3) Необходимым условием экстремума функции является, как известно, равенство нулю её производной, т.е.  $y'_x = 0$ .

Поскольку кривая задана параметрически, то используя (11), найдём

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = 0. \Rightarrow t_0 = \pi. \text{ Котангенс при}$$

переходе через точку  $t_0 = \pi$  меняет знак с плюса на минус, поэтому в этой точке кривая достигает максимума  $y_{\max} = 2$  при  $x = \pi$ .

## § 5. Дифференциал. Правила нахождения дифференциала

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и пусть  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$  — приращение функции в точке  $x_0$ , соответствующее приращению аргумента  $\Delta x = x - x_0$ .

**Опр.1.** Если приращение функции в точке  $x_0$  можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \quad (1)$$

где  $A$  — величина, не зависящая от  $\Delta x$ , то функция  $y = f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , а линейная часть приращения функции  $A \cdot \Delta x$  называется дифференциалом функции в точке  $x_0$  и обозначается

$$dy = d(f(x_0)) = A \cdot \Delta x.$$

Таким образом,  $\Delta y = dy + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . (2)

Из (1) видно, что приращение функции  $\Delta y$  и её дифференциал являются эквивалентными бесконечно малыми в точке  $x_0$ .

**Теорема 1.** Для того, чтобы функция была дифференцируемой в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке.

**Доказательство.** Пусть функция дифференцируема в точке  $x_0$ , т.е. имеет место равенство (1). Разделив обе части этого равенства на  $\Delta x \neq 0$  и переходя к пределу, найдём

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A. \quad (3)$$

Из (3) видно, что производная существует и равна  $A$ , т.е.  $y' = f'(x_0) = A$ . Необходимость доказана.

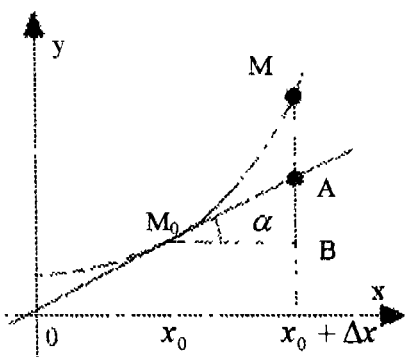
Пусть теперь производная существует  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Согласно лемме §5 гл 2  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$ , или  $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$  Последнее равенство совпадает с (1) и означает дифференцируемость функции в точке  $x_0$ . Теорема доказана.

Из теоремы следует, что  $dy = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \Delta x$  (4)

Если  $y = x$ , то согласно (4)  $dy = dx = \Delta x$  Учитывая это, (4) перепишем в виде  $dy = f'(x_0) dx$  Из последней записи следует  $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$ , т.е. производная функции есть отношение дифференциалов функции и независимого переменного

Проведем к графику функции  $y = f(x)$  касательную в точке  $M_0(x_0, y_0)$  Из чертежа видно, что  $MВ = \Delta y$  — приращение функции в точке  $x_0$ , а  $АВ = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) \Delta x = dy$  — приращение ординаты касательной в точке  $M_0$ , равное дифференциалу. Отсюда ясен геометрический



смысл дифференциала.

Перепишем (2) следующим образом:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) + o(\Delta x), \text{ или}$$

$$y \approx y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \quad (5)$$

Сравнивая (5) с уравнением касательной (см. 3 §1 гл.3), мы видим, что всякую дугу дифференцируемой кривой в

окрестности точки  $x_0$  можно с точностью до бесконечно малой высшего порядка относительно  $\Delta x$  заменить на отрезок касательной, т.е. линеаризовать функцию, выделить её линейную часть.

Рассмотрим теперь правила нахождения дифференциала.

**Теорема 2.** Если каждая из функций  $u(x)$  и  $v(x)$  дифференцируемая в точке  $x_0$ , то их сумма, произведение и частное также дифференцируемые функции в этой точке, при этом

- 1)  $d(u \pm v) = du \pm dv$ ,
- 2)  $d(uv) = v du + u dv$ ,
- 3)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$ ,  $v(x_0) \neq 0$ .

Докажем второе утверждение теоремы (первое и третье доказываются аналогично). Поскольку дифференцируемые функции имеют производные, то пользуясь (4) и теоремой 1 § 2, получим

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv') dx = v(u' dx) + u(v' dx) = v du + u dv.$$

Теорема доказана.

Поскольку производная постоянной равна нулю и дифференциал от неё равен нулю  $dc = 0$ . Тогда из второго утверждения теоремы 2 следует  $d(cu) = cdu$ , т.е. постоянную можно выносить за знак дифференциала.

Рассмотрим сложную функцию, являющуюся суперпозицией двух функций  $y = F(x) = f(u) = f(g(x))$ .

Предполагая все условия теоремы 2 §2 выполненными, найдём

$$dy = F'(x) dx = F'_u \cdot u'_x dx = F'_u du, \text{ или } F'_x dx = F'_u du. \quad (6)$$

Из (6) видно, что форма записи дифференциала не меняется от того, является ли переменная независимой или зависимой (окончательной или промежуточной). Это

свойство называют инвариантностью формы первого дифференциала.

## § 6. Производные и дифференциалы высших порядков

Если функция  $y = f(x)$  дифференцируемая на интервале  $(a, b)$ , то её производная  $y' = f'(x)$  является функцией и тоже может иметь производную. Производная от производной называется второй производной (производной второго порядка)  $(f'(x))' \approx y'' = f''(x) = f^{(2)}(x)$ . Производная  $f'(x)$  называется производной первого порядка. Аналогично определяются производные более высокого порядка  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ .

**Пример 1.** Доказать, что

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Доказательство проведём методом математической индукции (индукция может быть неполной, полной и математической), который заключается в следующем: проверяется утверждение при  $n = 1$ ; если из предположения, что оно верно при  $n$  следует, что оно верно и при  $n + 1$ , то делается вывод, что утверждение верно при любом натуральном  $n$ . Итак, проверим (1) при  $n = 1$ .  $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ . Формула (1) выполняется. Пусть (1) верно при  $n$ . Найдём  $(n + 1)$ -ю производную.

$$(\sin x)^{(n+1)} = \left( (\sin x)^{(n)} \right)' = \left( \sin \left( x + \frac{\pi}{2} n \right) \right)' = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} n \right) =$$

$= \sin \left( x + \frac{\pi}{2} (n+1) \right)$ . Как видно, формула (1) верна и при  $n+1$ , следовательно по методу математической индукции она верна при любом натуральном  $n$ .

**Упражнение.** Доказать, что  $(\cos x)^{(n)} = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} n \right)$ . (2)

Аналогично можно доказать, что

$$1) (cu(x))^{(n)} = cu^{(n)}(x),$$

$$2) (u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x),$$

$$3) (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n c_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Последняя формула называется формулой Лейбница. Она напоминает бином Ньютона (см. 4 §6 гл.2), при этом  $u^{(0)} = u(x)$ .

**Пример 2.** Найти  $n$ -ю производную функции  $y = x^2 e^x$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой Лейбница. Пусть  $u = x^2$ , тогда  $u' = 2x$ ,  $u'' = 2$ ,  $u^{(3)} = 0$  и все последующие производные равны нулю. Пусть  $v = e^x$ , т.к.  $(e^x)^{(n)} = e^x$ , то по формуле Лейбница получим

$$\begin{aligned} (x^2 e^x)^{(n)} &= c_n^0 x^2 e^x + c_n^1 2x e^x + c_n^2 2 e^x = \\ &= (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Найти вторую производную от функции, заданной параметрически  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in E$ .

**Решение.** Используя (11) §4 и правила дифференцирования сложной функции, получим

$$y''_{xx} = \left( \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)'_x = \left( \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)'_t \cdot t'_x = \frac{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}{(\varphi')^3}. \quad (3)$$

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема на некотором интервале. Тогда первый дифференциал  $dy = f'(x) dx$  является функцией  $x$ , а  $dx = \Delta x$  считается независимым от  $x$ , если  $x$  — независимая переменная. Поэтому при нахождении второго дифференциала  $d^2y$ , т.е. дифференциала от дифференциала,  $dx$  просто выносится за знак дифференциала как постоянная.

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x)) dx = (f'(x))' dx \cdot dx = f''(x) dx^2.$$

Здесь  $dx^2 = (dx)^2$ . Заметим, что  $d^2x = d(dx) = 0$ , если  $x$  — независимая переменная. Методом математической индукции можно доказать, что

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x) dx^n. \quad (4)$$

Из (4) следует, что  $f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$ . (5)

Рассмотрим теперь сложную функцию  $y = f(u) = f(g(x))$ . Используя инвариантность формы первого дифференциала, запишем  $dy = f'_u du$ . Здесь  $u = g(x)$  не является независимой переменной, поэтому  $du = g'(x) dx$  не является постоянной величиной. Найдём второй дифференциал от сложной функции.

$$d^2y = d(f'_u du) = d(f'_u) du + f'_u d(du) = f''_{uu} du^2 + f'_u d^2u. \quad (6)$$

Сравнивая (6) с (4), видим, что второй дифференциал не обладает инвариантностью формы. Очевидно, не обладают инвариантностью формы и все последующие дифференциалы.

Понятие высших производной и дифференциала распространяется на вектор-функцию  $\vec{r}(t)$ , при этом

$$d^n \vec{r}(t) = (x^{(n)}(t)\vec{i} + y^{(n)}(t)\vec{j} + z^{(n)}(t)\vec{k}) dt^n.$$

Пусть  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательной к траектории движения точки. Поскольку  $(\vec{\tau}, \vec{\tau}) = \vec{\tau}^2 = 1$ , то  $(\vec{\tau}^2)' = 2\vec{\tau} \cdot \dot{\vec{\tau}} = 0$ , т.е. векторы  $\vec{\tau}$  и  $\dot{\vec{\tau}}$  взаимно перпендикулярны. Если  $\vec{\tau}$  определяет направление касательной, то вектор  $\dot{\vec{\tau}}$  определяет направление главной нормали к траектории движения.

Если скорость  $\vec{v}$  движения точки по траектории определяется первой производной  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau} = v \cdot \vec{\tau}$ , то ускорение, очевидно, определяется второй производной от радиус-вектора.

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{w} = (v \cdot \vec{\tau})' = v' \vec{\tau} + v \dot{\vec{\tau}}. \quad (7)$$

Можно доказать, что  $\dot{\vec{\tau}} = kv \cdot \vec{n}_0$ , где  $\vec{n}_0$  – единичный вектор главной нормали, а  $k = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{v^3}$  – кривизна траектории. Величину обратную кривизне называют радиусом кривизны  $\rho = \frac{1}{k}$ . Перепишем (7)

$$\vec{w} = v' \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}_0 = w_\tau \vec{\tau} + w_n \vec{n}_0. \quad (8)$$

Равенство (8) даёт разложение ускорения на касательную составляющую  $w_\tau = \frac{dv}{dt}$  и нормальную составляющую

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$



**Пример.** Найти ускорение движения точки и его касательную и нормальную составляющие в момент времени  $t = \frac{\pi}{2}$  (см. пр 1 §4 гл.3).

**Решение.** Согласно (7) найдём

$$\vec{w} = \ddot{\vec{r}}(t) = \sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}.$$

$$\vec{w}|_{t=\frac{\pi}{2}} = \vec{i}, \quad |\vec{w}|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1, \quad w_\tau = \frac{dv}{dt} = \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)' = \cos \frac{t}{2} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Найдём кривизну траектории в момент времени  $t = \frac{\pi}{2}$ .

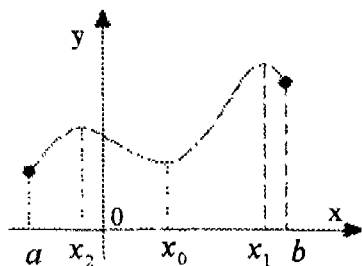
$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ \ddot{x} & \ddot{y} & 0 \end{vmatrix} = |\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}| = |\cos t - 1|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Учитывая, что  $v = \sqrt{2}$ , получим  $k = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{v^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Тогда

$$\rho = \frac{1}{k} = 2\sqrt{2}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \vec{w} = w_\tau \vec{\tau} + w_n \vec{n}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{\tau} + \vec{n}_0).$$

## § 7. Теоремы Ферма, Ролля, Коши и Лагранжа

**Опр.** Функция  $y = f(x)$  достигает в точке  $x_0$  локального максимума, если существует  $O(x_0, \delta)$  такая, что  $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in O(x_0, \delta)$ . Аналогично, если  $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in O(x_0, \delta)$ , то функция достигает



в точке  $x_0$  локального минимума. Локальные максимум и минимум называются локальными экстремумами.

Если функция на отрезке  $[a, b]$ , достигает своих наименьшего  $m$  и наибольшего  $M$  значений, то они могут достигаться в точках локальных экстремумов или на концах отрезка. В нашем случае  $m = f(a)$ ,  $M = f(x_1)$ .

**Теорема 1 (Ферма).** Если функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x = C$  и достигает в ней локального экстремума, то  $f'(C) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть функция  $y = f(x)$  достигает в точке  $C$  локального максимума. Тогда  $f(C) \geq f(x) \forall x \in O(C, \delta)$ , или  $\Delta y = f(x) - f(C) = f(C + \Delta x) - f(C) \leq 0 \forall x \in O(C, \delta)$ . Очевидно, отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(C + \Delta x) - f(C)}{\Delta x} \leq 0, \text{ если } \Delta x > 0,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(C + \Delta x) - f(C)}{\Delta x} \geq 0, \text{ если } \Delta x < 0, \Delta x = x - C.$$

Переходя к пределу, найдём

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_+(C) \leq 0, \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_-(C) \geq 0.$$

Т.к. производная  $f'(C)$  по условию теоремы существует, то  $f'(C) = f'_-(C) = f'_+(C)$ , что возможно только в случае, когда  $f'(C) = 0$ .

Доказательство аналогично, если функция достигает в точке  $C$  локального минимума.

**Теорема 2. (Ролля).** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , а на концах отрезка принимает равные значения  $f(a) = f(b)$ , то существует по крайней мере одна точка  $x = C$ ,  $C \in (a, b)$ , в которой  $f'(C) = 0$ .

**Доказательство.** Т.к функция непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она достигает на нем своих наименьшего  $m$  и наибольшего  $M$  значений (см. теорему 4 §8 гл.2). Если  $m = M$ , то функция  $f(x)$  постоянная и её производная в любой точке равна нулю. Теорема в этом случае справедлива. Пусть  $m \neq M$ . Поскольку  $f(a) = f(b)$ , то по крайней мере одно из чисел  $m$  или  $M$  отлочно от  $f(a)$ . Пусть  $M \neq f(a)$ , т.е. наибольшее значение достигается во внутренней точке отрезка.

$M = f(C)$ ,  $C \in (a, b)$ . Т.к. в точке  $x = C$  функция достигает локального максимума и  $f'(C)$  существует, то по теореме Ферма  $f'(C) = 0$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$  и  $f'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ , то  $f(a) \neq f(b)$ .

**Доказательство** (от противного). Пусть  $f(a) = f(b)$ , тогда по теореме Ролля  $\exists C \in (a, b)$  ( $f'(C) = 0$ ), что противоречит условию следствия.

**Теорема 3. (Коши).** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывные на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемые на интервале  $(a, b)$ , причем  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ , то найдётся точка  $x = C$ ,  $C \in (a, b)$  такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(C)}{g'(C)}. \quad (1)$$

**Доказательство.** Составим вспомогательную функцию  $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ , где  $\lambda$  — некоторый множитель. Подберём его так, чтобы функция  $F(x)$  удовлетворяла условиям теоремы Ролля, т.е. чтобы  $F(a) = F(b)$ , поскольку все другие условия выполняются. Выполняя последнее требование, получим  $f(a) + \lambda g(a) = f(b) +$

$+\lambda g(b)$ , или  $\lambda(g(a) - g(b)) = f(b) - f(a)$ . Согласно требованию теоремы Ролля  $g(a) - g(b) \neq 0$ , поэтому множитель  $\lambda$  существует  $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)}$ .

Итак, функция

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

удовлетворяет условиям теоремы Ролля, т.е.  $F'(C) = 0$ , или  $f'(C) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(C) = 0$ , или  $\frac{f'(C)}{g'(C)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .

Теорема доказана.

**Следствие (теорема Лагранжа).** Пусть  $g(x) = x$ . тогда (1) примет вид

$$f(b) - f(a) = f'(C)(b - a), C \in (a, b). \quad (2)$$

Равенство (2) называют формулой Лагранжа конечных приращений. Пусть  $a = x_0$ ,  $b = x_0 + \Delta x$ , тогда формулу (2) для функции  $y = f(x)$  удобнее переписать в виде

$$\Delta y = f'(C) \cdot \Delta x, C \in (x_0, x_0 + \Delta x). \quad (3)$$

Из сравнения (3) с приближенной формулой

$\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$  (см. 5 §5 гл.3) ясно название - формула конечных, а не бесконечно малых приращений.

**Пример.** Положим  $\sqrt[3]{1,02} \approx 1$  и оценим допущенную при этом ошибку. Для этого рассмотрим функцию  $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x \in [1; 1,02]$ . Она удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, поэтому по формуле (2) запишем

$$f(1,02) - f(1) = f'(C) \cdot (1,02 - 1) = \frac{0,02}{5\sqrt[3]{C^4}}.$$

Очевидно, наибольшая ошибка  $\varepsilon = f(1,02) - 1$  будет при

$C = 1$ , т.е.  $\varepsilon \leq \frac{0,02}{5} = 0,004$ . Итак, если значением  $\sqrt[5]{1,02}$  считать единицу, то ошибка не превзойдет 0.004.

## § 8. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей

**Теорема (Лопиталя).** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены, непрерывны и дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $x = a$ , при этом  $g(x)$  и  $g'(x)$  не обращаются в нуль в этой окрестности, а  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \text{ Тогда, если существует } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (1)$$

(конечный или бесконечный), то существует равный ему

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (2)$$

**Доказательство.** Поскольку функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x = a$  могут быть не определены, то доопределим их так:  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  и  $g(a) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . Таким образом,

функции  $f(x)$  и  $g(x)$  стали непрерывными в точке  $x = a$ .

Пусть  $x$  — произвольная точка из окрестности точки  $a$ .

Применим к функциям  $f(x)$  и  $g(x)$  теорему Коши.

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \xi \in (x, a). \quad (3)$$

Очевидно, при  $x \rightarrow a$  и  $\xi \rightarrow a$ . Тогда из существования предела (1) следует существование предела

$$\lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Учитывая это, из (3) получим  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Теорема доказана.

Формула (2) носит название правила Лопиталья раскрытия неопределённости вида  $\frac{0}{0}$ .

**Замечание 1.** Если функции  $f'(x)$  и  $g'(x)$  снова удовлетворяют теореме, то правило Лопиталья можно применить повторно.

**Пример 1.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{\cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1}$ .

**Решение.** Четырежды применяя правило Лопиталья,

$$\begin{aligned} \text{получим } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{\cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}{-\sin x + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{-\cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1. \end{aligned}$$

**Замечание 2.** Правило Лопиталья можно применить и для раскрытия неопределённостей вида  $\frac{\infty}{\infty}$ , т.е. когда

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ . Точка  $a$  также может быть бесконечно удалённой, т.е. когда  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ .

**Пример 2.** Найти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$ .

**Решение.** После  $n$ -кратного применения правила Лопиталья к неопределённости  $\frac{\infty}{\infty}$ , получим  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$ .

**Замечание 3.** Если неопределённости вида  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  предварительно свести к неопределённости  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ , то их можно раскрыть с помощью правила Лопиталья.

**Пример 3.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ .

**Решение.** Данная неопределённость вида  $1^\infty$ . Пусть  $(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = u(x)$ , тогда  $\ln u(x) = \frac{\ln(e^x + x)}{x}$ . Получили неопределённость вида  $\frac{0}{0}$ . Применяв правило Лопиталья,

$$\text{найдем } \lim_{x \rightarrow 0} \ln u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2.$$

Из непрерывности логарифмической функции следует

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln u(x) = \ln(\lim_{x \rightarrow 0} u(x)) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = e^2.$$

**Замечание 4.** Следует внимательно проверять выполнение условий теоремы, в противном случае возможны ошибки.

**Пример 4.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{3x - \sin x}$ .

$$\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{3x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{\sin x}{x}}{3 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{3}.$$

Данная неопределённость вида  $\frac{\infty}{\infty}$ . Применив к ней

дважды правило Лопиталья, получим неверный результат

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{3x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos x}{3 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sin x}{\sin x} = -1.$$

Ошибка произошла из-за того, что предел (1) не существует. Поэтому правило Лопиталья в данном случае применить нельзя

## § 9 Формула Тейлора

Дифференцируемую функцию  $y = f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ , как известно (см. §5), можно приближенно заменить отрезком касательной В результате

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (1)$$

Если вместо линейной функции взять некоторый многочлен, то точность такой замены может возрасти. Для этого используют многочлен Тейлора

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k. \quad (2)$$

**Теорема.** Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема  $n$  раз в некотором интервале  $(a, b)$ , содержащем точку  $x_0$ , то в этом интервале справедлива формула

$$f(x) = T_n(x) + r_n(x) \quad (3)$$

При этом значения функции и всех ее производных до  $n$ -го порядка в точке  $x_0$  совпадают со значениями многочлена Тейлора и соответствующими его производными, а остаточный член

$$r_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

в точке  $x_0$  является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с  $(\Delta x)^n = (x - x_0)^n$ , т.е.



$$r_n(x) = o(\Delta x^n) \quad (4)$$

**Доказательство.** Запишем многочлен Тейлора в развернутом виде

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \quad (2')$$

Из (2') видно, что  $T_n(x_0) = f(x_0)$ ,  $T_n'(x_0) = f'(x_0)$ , ...,

$$T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Следовательно  $r_n(x) = f(x) - T_n(x)$  в точке  $x_0$  обращается в нуль вместе со своими производными, т. е.

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Применяя  $n$  раз правило Лопиталю, найдем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

А это означает, что  $r_n(x) = o((x-x_0)^n) = o(\Delta x^n)$ . Теорема доказана.

Формула (3) называется формулой Тейлора, а  $r_n(x) = o(\Delta x^n)$  — остаточным членом формулы Тейлора в форме Пеано.

Заметим, что разложение по формуле Тейлора (3) единственное.

Если функция  $f(x)$  имеет  $n+1$  производную на интервале  $(a, b)$ , то остаточный член можно записать в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (a, b), \quad (5)$$

$$\text{или} \quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Отметим, что при  $n = 0$  формула Тейлора совпадает с формулой Лагранжа (см. §7). Если  $x_0 = 0$ , то формулу Тейлора называют формулой Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \cdot x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x). \quad (6)$$

Если первое слагаемое  $f(x_0)$  многочлена Тейлора перенести в левую часть равенства (3), то формулу Тейлора можно записать так.

$$f(x) - f(x_0) = \Delta y = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(x_0) + r_n(x), \text{ или}$$

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2!} d^2 y + \frac{1}{3} d^3 y + \dots + \frac{1}{n!} d^n y + r_n(x). \quad (7)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи разложения по формуле Тейлора или Маклорена.

1. Пусть  $f(x) = P_n(x)$ , т.е. функция представляет собой многочлен  $n$ -ой степени. Тогда из (3) получим

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k. \quad (8)$$

Остаточный член  $r_n(x) \equiv 0$ , что следует из (5). В частности, если  $f(x) = P_n(x) = (x+a)^n$ , то  $f^{(k)}(x_0) = n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot (x+a)^{n-k}$  и (8) при  $x_0 = 0$  примет вид:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} x^k \cdot a^{n-k}. \quad (9)$$

Таким образом, мы доказали формулу бинома Ньютона (см. §6 гл.2).

2. Пусть  $f(x) = e^x$ . Поскольку  $(e^x)^{(k)} = e^x \Big|_{x=0} = 1$ , то из (6) получим

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\theta x}. \quad (10)$$

Докажем, что  $|r_n(x)| \approx \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $e^{\theta x}$  от  $n$  не зависит и при любом конечном  $x$  является ограниченной величиной, то достаточно доказать, что последовательность  $y_{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$  сходится к нулю.

$$y_{n+2} = \frac{|x|^{n+1} \cdot |x|}{(n+1)!(n+2)} = y_{n+1} \cdot \frac{|x|}{n+2}. \quad (11)$$

Из (11) следует, что при  $|x| < n+2$  эта последовательность монотонно убывает, но ограничена снизу, т.к.  $y_{n+1} \geq 0$ . По теореме 2 §2 гл.2 она сходится. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = a$ , тогда

из (11) получим  $a = a \cdot 0 = 0$ , что и требовалось доказать.

Поскольку остаточный член формулы Тейлора (10) стремится к нулю, то увеличивая число слагаемых этой формулы, можно вычислить  $e^x$  с любой точностью. В частности при  $x = 1$  можно вычислить само иррациональное (трансцендентное) число  $e$ .

**Упражнение 1.** Найти число членов разложения в формуле Маклорена (10), чтобы ошибка вычисления числа  $e$  не превышала  $10^{-5}$ .

**Замечание.** Поскольку функция  $y = e^x$  дифференцируема сколько угодно раз, а остаточный член стремится к нулю, то формально можно записать

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (12)$$

Формула (12) называется рядом Тейлора для функции  $y = e^x$ .

3. Пусть  $y = \sin x$ . Поскольку  $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$  (см.

§6), то  $\sin^{(n)} 0 = \sin \frac{\pi}{2} n = \begin{cases} 0, \text{ если } n = 2k, \\ (-1)^k, \text{ если } n = 2k + 1. \end{cases}$

Из (6) получим

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(\theta x + \frac{\pi}{2}(n+1)\right). \quad (13)$$

Аналогично найдем формулу Маклорена для функции  $y = \cos x$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left(\theta x + \frac{\pi}{2}(n+1)\right). \quad (14)$$

Можно доказать, что остаточные члены формул (13,14) стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому можно записать ряды Тейлора для функций  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ .

$$\begin{aligned} y = \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ y = \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned} \quad (15)$$

**Упражнение 2.** Доказать, что  $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n a_k x^k + r_n(x)$ ,

где  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ ,

$r_n(x) = a_{k+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$  Рассмотреть частный случай, когда  $\alpha = -1$

## § 10. Асимптоты графика функций

Различают асимптоты вертикальные, горизонтальные и наклонные.

**Вертикальные асимптоты** Если для функции  $f(x)$  выполнено по крайней мере одно из соотношений

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty, \quad (1)$$

то прямая  $x = x_0$  называется вертикальной асимптотой функции  $f(x)$ .

Формулы (1) показывают, что вертикальные асимптоты нужно искать среди точек разрыва функции.

**Пример 1.** Найти вертикальные асимптоты функции

$$y = \frac{x}{1 - x^2}$$

**Решение.** Точки разрыва нашей функции  $x_{1,2} = \pm 1$ .

Проверим являются ли прямые  $x = 1$  и  $x = -1$

вертикальными асимптотами. Имеем  $\lim_{x \rightarrow 1 - 0} \frac{x}{1 - x^2} = +\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 1 + 0} \frac{x}{1 - x^2} = -\infty. \text{ Согласно определению, прямая } x = 1$$

является вертикальной асимптотой. Аналогично, прямая  $x = -1$  является вертикальной асимптотой.

**Наклонные асимптоты.** Если функция  $f(x)$  определена при всех  $x > x_0$  ( $x < x_0$ ), то прямая  $y = kx + b$  называется наклонной асимптотой функции  $f(x)$  при

$x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ), если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0 \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0). \quad (2)$$

Из (2) найдем коэффициенты  $k$  и  $b$

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]. \quad (3)$$

Отметим, что в формулах (3) нужно выбирать знак бесконечности в зависимости от того, на какой полупрямой  $x > x_0$  или  $x < x_0$  определена функция. Если функция  $f(x)$  определена на всей числовой прямой, то по формулам (3) нужно вычислить четыре предела.

**Пример 2.** Найти наклонные асимптоты функции

$$y = \frac{1}{2}x + \operatorname{arctg}(x).$$

**Решение.** По формулам (3) имеем

$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} \right) = \frac{1}{2}, \quad b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg}(x) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, график нашей функции имеет две асимптоты  $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

**Горизонтальные асимптоты.** Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот. Их уравнения получаются по формулам (3), когда  $k=0$  и существует конечный предел  $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ .

## **§ 11. Точки экстремума функции. Интервалы возрастания и убывания**

Рассмотрим теперь, как находятся точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции  $y=f(x)$ . Определение точек локального экстремума см. в §7.

Фактически, необходимое условие локального экстремума дается теоремой Ферма (см. §7). Это условие не является достаточным, как показывает простой пример  $y = x^3$ . Здесь  $y' = 3x^2 = 0$  при  $x=0$ , но в точке  $x=0$  функция экстремума не имеет.

Отметим, что локальный экстремум функции может достигаться и в точках, в которых производная не

существует. Например, функция  $y = |x|$  не дифференцируема в точке  $x_0 = 0$ . Тем не менее, эта точка, согласно определению, является точкой экстремума функции.

Допустим, мы нашли все точки возможного экстремума — все решения уравнения  $f'(x) = 0$ . Как определить, имеет ли функция в этих точках локальный экстремум? Если имеет, то какого характера экстремум — максимум или минимум? Ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме.

**Теорема 1. (Достаточное условие экстремума).** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$ , дифференцируема во всей окрестности за исключением, может быть, самой точки  $x_0$  и с каждой стороны от точки  $x_0$  в этой окрестности ее производная сохраняет постоянный знак. Тогда, если  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  и  $x \neq x_0$ :

а)  $f'(x) > 0$  при  $x < x_0$  и  $f'(x) < 0$  при  $x > x_0$  (производная меняет знак с плюса на минус при переходе через точку  $x_0$  слева направо), то точка  $x_0$  является точкой строгого максимума;

б)  $f'(x) < 0$  при  $x < x_0$  и  $f'(x) > 0$  при  $x > x_0$  (производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку  $x_0$  слева направо), то точка  $x_0$  является точкой строгого минимума.

**Доказательство.** Докажем, например, а). Утверждение б) теоремы доказывается аналогично. Напишем формулу Лагранжа для функции  $y = f(x)$  на отрезке с концами в точках  $x_0$  и  $x$  из интервала  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ :

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где точка  $\xi$  лежит между точками  $x$  и  $x_0$ . Знак разности  $x - x_0$  при переходе  $x$  через точку  $x_0$  слева направо, очевидно,

меняется с минуса на плюс. Производная  $f'(\xi)$  по условию утверждения а) меняет знак с плюса на минус. Значит,  $f'(\xi)(x - x_0)$  всегда отрицательно. Поэтому  $f(x) - f(x_0) < 0$  и  $f(x) < f(x_0) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $x \neq x_0$ . Следовательно, в точке  $x_0$  функция достигает локального максимума. Теорема доказана.

Заметим, что тип экстремума можно определять с помощью исследования второй производной. Если в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  дважды дифференцируема, то при  $f''(x_0) < 0$  в точке  $x_0$  - максимум, при  $f''(x_0) > 0$  в точке  $x_0$  - минимум.

Пусть  $(a, b)$  интервал, на котором функция  $f(x)$  непрерывна.

**Теорема 2.** Интервал  $(a, b)$  является интервалом возрастания функции  $f(x)$ , если  $\forall x \in (a, b) f'(x) > 0$ , и является интервалом убывания функции  $f(x)$ , если  $\forall x \in (a, b) f'(x) < 0$  (без доказательства).

**Пример 1.** Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции  $y = x^3 \sqrt{(x-1)^2}$ .

**Решение.** Данная функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Найдем ее первую производную

$$y' = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}. \text{ Уравнение } y' = 0 \text{ имеет единственный корень}$$

$x = \frac{3}{5}$ . Следовательно, интервалы возрастания и убывания

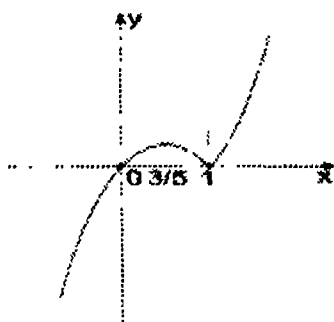
таковы:  $(-\infty, \frac{3}{5}), (\frac{3}{5}, 1), (1, +\infty)$ . Сведем исследования в таблицу.



Интервалы	$(-\infty, \frac{3}{5})$	$\frac{3}{5}$	$(\frac{3}{5}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f(x)$	возрастает	$\frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$	убывает	0	возрастает
$f'(x)$	$>0$	0	$<0$	$\infty$	$>0$
Выводы		max			

Примерный график функции представлен на рис. Его можно уточнить, проведя дополнительное исследование.

Упражнение. Доказать теорему 1, применив формулу Тейлора, в предположении, что функция дифференцируема в точке  $x_0$ .



## § 12. Точки перегиба. Интервалы выпуклости и вогнутости

Важными элементами графика функции являются ее точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.

Пусть функция  $y=f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$ . Тогда в каждой точке этого интервала можно провести касательную к графику функции  $f(x)$ , которая имеет уравнение  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0 = f(x_0)$ .

**Опр.1.** Говорят, что график функции имеет на интервале  $(a, b)$  выпуклость направленную вниз (вверх), если он расположен не ниже (не выше) любой касательной к графику функции на интервале  $(a, b)$ .

**Опр.2.** Точка  $M(x_0, f(x_0))$  графика функции называется точкой перегиба, если в точке  $M$  график имеет касательную и существует такая окрестность точки  $x_0$ , в которой график

функции  $f(x)$  слева и справа от точки  $x_0$  имеет разные направления выпуклости

Заметим, что в точке перегиба касательная пересекает график функции, так как с одной стороны от этой точки график функции лежит под касательными, а с другой - над касательными.

Способ нахождения точек, в которых может быть перегиб графика функции (критических точек второго рода), дается следующей теоремой.

**Теорема 1. (Необходимое условие точки перегиба).**

Пусть в точке  $M(x_0, f(x_0))$  график функции  $y=f(x)$  имеет перегиб и функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  непрерывную вторую производную. Тогда в точке  $x_0$   $f''(x_0) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть функция  $y=f(x)$  имеет в точке перегиба  $x_0$  касательную  $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ ,  $y_0 = f(x_0)$ .

Разложив функцию  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$  по формуле Тейлора второго порядка, получим

$$\begin{aligned} f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + y_0) &= \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) - \\ &- (f'(x_0)(x - x_0) + y_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \end{aligned}$$

при  $x \rightarrow x_0$ .

Предположим, что  $f''(x_0) \neq 0$ . Тогда знак разности  $f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + y_0)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  совпадает со знаком числа  $f''(x_0)$ . Но так как по условию теоремы  $f''(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то она в достаточно малой окрестности сохраняет постоянный знак. Это означает, что касательные к графику функции в указанной окрестности лежат строго над графиком функции, либо строго под графиком функции. Поэтому,

при допущении  $f''(x_0) \neq 0$ , точка  $M(x_0, f(x_0))$  не может быть точкой перегиба функции. Это противоречие доказывает теорему.

Таким образом, для того чтобы найти точки, в которых может быть перегиб, нужно найти все решения уравнения

$$f''(x) = 0. \quad (1)$$

Чтобы выяснить какие из корней уравнения (1) являются точками перегиба нужно применить достаточное условие.

**Теорема 2. (Достаточное условие точки перегиба).** Пусть функция  $y=f(x)$  имеет в точке  $x_0$  касательную и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$ , за исключением может быть самой точки  $x_0$ , и ее вторая производная меняет знак при переходе через точку  $x_0$ . Тогда точка  $x_0$  является точкой перегиба функции  $f(x)$ .

**Доказательство.** Разложим функцию  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$  по формуле Тейлора первого порядка и составим разность.

$$f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + y_0) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Разность в левой части этого равенства - разность в точке  $x$  ординат функции и касательной, проведенной к графику функции в точке  $x_0$ . Поскольку знак этой разности определяется знаком  $f''(\xi)$  ( $\xi$  лежит между точками  $x$  и  $x_0$ ), а по условию теоремы  $f''(\xi)$  меняет знак при переходе через точку  $x_0$ , то разность также меняет знак при переходе аргумента  $x$  через точку  $x_0$ .

Это означает, что касательная с одной стороны от точки  $x_0$  лежит ниже графика функции, а с другой стороны - выше графика функции. Значит точка  $x_0$  - точка перегиба графика функции  $f(x)$ . Теорема доказана.

Как показывает следующий пример, в точке перегиба вторая производная может не существовать.

Рассмотрим функцию  $f(x) = x^{1/5}$ . Так как  $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$ ,

то в точке  $x=0$  касательная вертикальна. Найдем

$f''(x) = -\frac{4}{25}x^{-9/5}$ . В точке  $x=0$   $f''(x)$  меняет знак -

$f''(-1) = \frac{4}{25}$ ,  $f''(1) = -\frac{4}{25}$ . Точка  $x=0$  является точкой

перегиба функции.

Отметим важное следствие теоремы: если на интервале  $(a, b)$   $f''(x) > 0$ , то функция выпукла вниз (вогнута); если на интервале  $(a, b)$   $f''(x) < 0$ , то функция выпукла вверх.

Таким образом, интервалы выпуклости и вогнутости функции отделяются друг от друга точками перегиба или точками разрыва второй производной.

**Пример 1.** Найти точки перегиба и интервалы возрастания и убывания для функции из примера предыдущего параграфа.

**Решение.** Найдем вторую производную  $y'' = \frac{2(5x-6)}{9(x-1)^3\sqrt{x-1}}$ .

Очевидно критическая точка  $x = \frac{6}{5}$ ,  $y''(\frac{6}{5}) = 0$ . При переходе

через точку  $x = \frac{6}{5}$   $y''$  меняет знак. Значит  $x = \frac{6}{5}$  - точка

перегиба.

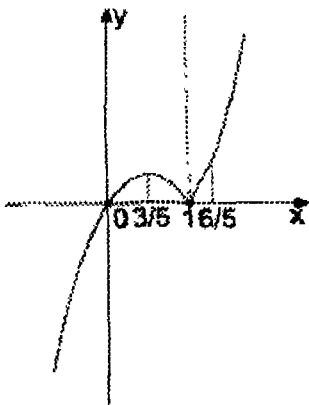
Исследование удобно оформить в виде таблицы.

Интервал	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \frac{6}{5})$	$\frac{6}{5}$	$(\frac{6}{5}, +\infty)$
$f(x)$	выпукла вверх		выпукла вверх		выпукла вниз
$f''(x)$	$< 0$	$\infty$	$< 0$	0	$> 0$
				точка перегиба	

Используя информацию из таблицы, уточним график функции.

Можно убедиться в том, что график функции не имеет асимптот.

**Упражнение.** Показать, что график функции  $y = x^3\sqrt{(x-1)^2}$  не имеет асимптот. Найти уравнения касательных в точке  $x=1$ .



Построение графика функции по точкам в подавляющем большинстве случаев не позволяет выявить все особенности поведения функции и получить качественный график. Поэтому к исследованию функций необходимо привлекать теоремы дифференциального исчисления. Обычно рекомендуется проводить исследования функции

по следующему плану:

- 1) найти область определения функции;
- 2) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
- 3) установить является ли функция четной, нечетной, общего вида, периодической или непериодической;
- 4) найти асимптоты графика функции;
- 5) найти точки экстремума, определить тип экстремума, найти интервалы возрастания и убывания.

б) найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функции.

По полученной информации построить эскиз графика функции.

# ГЛАВА 4. Интегральное исчисление

## функции одной переменной

### § 1. Неопределенный интеграл

**1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.** Различные задачи математики и ее многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике приводят к необходимости решения следующей задачи: по данной функции  $f(x)$  найти такую функцию  $F(x)$ , производная которой была бы равна функции  $f(x)$ , то есть  $F'(x) = f(x)$ .

Указанная задача является одной из основных задач интегрального исчисления.

**Опр.1.** Пусть  $y=f(x)$  – кусочно-непрерывная функция на отрезке  $[a, b]$ . Всякая непрерывная функция  $F(x)$ , определенная на отрезке  $[a, b]$  и, в каждой точке непрерывности  $x \in [a, b]$  функции  $f(x)$  обладающая производной, равной функции  $f(x)$ , называется первообразной для функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ .

**Пример 1.** Для функции  $y = x^3$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$  первообразной будет, например, функция  $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ , а

также функция  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1$ .

**Пример 2.** Для функции  $y = \begin{cases} 1 - \text{при } x \leq 1, \\ 0 - \text{при } x > 1 \end{cases}$ , первообразной

будет функция  $F(x) = \begin{cases} x - \text{при } x \leq 1, \\ 1 - \text{при } x > 1 \end{cases}$  и, например, функция

$F(x) = \begin{cases} x + 2 - \text{при } x \leq 1, \\ 3 - \text{при } x > 1. \end{cases}$

Из примеров видно, что первообразная определяется не единственным образом.

**Опр.2.** Множество всех первообразных функции  $f(x)$ , определенных на некотором отрезке  $[a, b]$ , называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$  на этом отрезке и обозначается

$$\int f(x)dx, \quad (1)$$

где  $\int$  — знак неопределенного интеграла,  $f(x)$  — подынтегральная функция,  $dx$  указывает по какой переменной берется неопределенный интеграл.

**Теорема.** Любые две первообразные функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  отличаются на произвольную постоянную.

**Доказательство.** Пусть  $F(x)$  и  $G(x)$  первообразные функции  $f(x)$  на промежутке  $[a, b]$ . Тогда  $F'(x) = f(x)$  и  $G'(x) = f(x)$  во всех точках непрерывности функции  $f(x)$ .

Поэтому  $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = 0$ . Покажем, что  $F(x) - G(x) = C$ ,  $C = \text{const}$ . Действительно, если  $x_1, x_2$  принадлежат отрезку непрерывности  $[\alpha, \beta]$  функции  $f(x)$ , то по теореме Лагранжа

$$(F(x_2) - G(x_2)) - (F(x_1) - G(x_1)) = (F(\xi) - G(\xi))'(x_2 - x_1),$$

поэтому  $F(x_2) - G(x_2) = F(x_1) - G(x_1)$  для всех  $x_1$  и  $x_2 \in [\alpha, \beta]$ , то есть функция  $F(x) - G(x)$  постоянна на  $[a, b]$ , поскольку она является таковой на каждом отрезке  $[\alpha, \beta]$  непрерывности функции  $f(x)$ . Теорема доказана.

В силу теоремы две первообразные функции  $f(x)$  связаны соотношением  $F(x) = G(x) + C$ ,  $C$  — произвольная постоянная.

Поэтому неопределенный интеграл часто обозначают так

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (2)$$

где  $F(x)$  некоторая первообразная функции  $f(x)$ .



## 2. Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Пусть функция  $F(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема во всех его внутренних точках, тогда

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (3)$$

Формулу (3) можно записать так

$$\int F'(x)dx = F(x) + C. \quad (4)$$

Соотношения (3), (4) вытекают из определения неопределенного интеграла.

2. Пусть функция  $f(x)$  имеет первообразную на отрезке  $[a, b]$ , тогда в любой внутренней точке отрезка  $[a, b]$ , в которой  $f(x)$  непрерывна, имеет место равенство

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \quad (5)$$

Формула (5) следует из определения неопределенного интеграла.

3. Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  имеют первообразные на отрезке  $[a, b]$ , то и функция  $f_1(x) + f_2(x)$  имеет первообразную на отрезке  $[a, b]$ , причем

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \quad (6)$$

(Без вывода).

4. Если функция  $f(x)$  имеет первообразную на отрезке  $[a, b]$  и  $k$  – число, то функция  $kf(x)$  также имеет первообразную на отрезке  $[a, b]$ , причем при  $k \neq 0$  справедливо равенство

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx + C. \quad (7)$$

(Без вывода).

3. Таблица неопределенных интегралов.

Операция вычисления неопределенного интеграла от данной функции называется интегрированием. Сравнивая формулу первого дифференциала  $dy = f'(x)dx$  с формулами (3), (4), (5) обратим внимание на то, что операции дифференцирования и неопределенного

интегрирования взаимно обратны, поэтому таблица неопределенных интегралов следует из таблицы дифференциалов или таблицы производных элементарных функций. Пусть  $u=u(x)$  любая дифференцируемая функция, тогда имеет место следующая таблица.

$$1. dC = 0, C = \text{const}$$

$$1'. \int dC = C$$

$$2. du^\alpha = \alpha u^{\alpha-1} du$$

$$2'. \int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$3. d \ln|u| = \frac{du}{u}$$

$$3'. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$4. da^u = a^u \ln(a) du$$

$$4'. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

В частности  $de^u = e^u du$ , а  $\int e^u du = e^u + C$

$$5. d \sin(u) = \cos(u) du$$

$$5'. \int \cos(u) du = \sin(u) + C$$

$$6. d \cos(u) = -\sin(u) du$$

$$6'. \int \sin(u) du = -\cos(u) + C$$

$$7. d \operatorname{sh}(u) = \operatorname{ch}(u) du$$

$$7'. \int \operatorname{ch}(u) du = \operatorname{sh}(u) + C$$

$$8. d \operatorname{ch}(u) = \operatorname{sh}(u) du$$

$$8'. \int \operatorname{sh}(u) du = \operatorname{ch}(u) + C$$

$$9. d \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{adu}{u^2 + a^2}$$

$$9'. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$10. d \operatorname{arcctg}\left(\frac{u}{a}\right) = -\frac{adu}{u^2 + a^2}$$

$$10'. \int \frac{-du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arcctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$11. d \operatorname{arcsin}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

$$11'. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$12. d \operatorname{arccos}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{-du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

$$12'. \int \frac{-du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arccos}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$13. d \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| = \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$$

$$13' \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C, |u| > |a|$$

$$14. d \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| = \frac{2adu}{u^2 - a^2} \quad 14'. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

## § 2. Замена переменной и интегрирование по частям

### 1. Замена переменной в неопределенном интеграле.

**Теорема 1.** (О замене переменной в неопределенном интеграле). Пусть функция  $u = \varphi(t)$  определена и дифференцируема на некотором промежутке  $T$  и промежуток  $X$  — множество ее значений. Пусть функция  $f(u)$  определена на промежутке  $X$  и имеет на нем первообразную  $F(u)$ . Тогда на промежутке  $T$  сложная функция  $F(\varphi(t))$  является первообразной для функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  и справедливо равенство

$$\int f(u) du \Big|_{u=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (1)$$

**Доказательство.** Рассмотрим на промежутке  $T$  сложную функцию  $F(\varphi(t))$ . Она непрерывна как композиция непрерывных функций. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$(F(\varphi(t)))' = F'_u(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

во всех точках  $u$  непрерывности функции  $f(u)$ . Т.е. функция  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  имеет первообразную на промежутке  $T$ , равную  $F(\varphi(t))$ . Следовательно,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Но,  $F(\varphi(t)) + C = (F(u) + C) \Big|_{u=\varphi(t)} = \int f(u) du \Big|_{u=\varphi(t)}$ , поэтому формула (1) справедлива. Теорема доказана.

Формула (1) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $\int \frac{u^2}{(1-u)^2} du = \mathfrak{I}$ .

**Решение.** Положим  $1-u=t$ , тогда  $u=1-t$ . Отсюда  $du = -dt$ . По формуле (1)

$$\mathfrak{I} = -\int \frac{(1-t)^2}{t^2} dt = -\int \left( \frac{1}{t^2} - 2\frac{1}{t} + 1 \right) dt = \frac{1}{t} + 2\ln|t| - t + C.$$

Или, возвращаясь к переменной  $u$ ,

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{1-u} + 2\ln|1-u| - 1 + u + C.$$

## 2. Формула интегрирования по частям.

В некоторых случаях для отыскания первообразной удобно пользоваться формулой интегрирования по частям.

**Теорема 2.** Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  определены и дифференцируемы на промежутке  $X$  и пусть функция  $u'(x)v(x)$  имеет на этом промежутке первообразную. Тогда на промежутке  $X$  функция  $u(x)v'(x)$  также имеет первообразную и справедлива формула

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \quad (2)$$

**Доказательство.** Из равенства

$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$  следует, что

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x).$$

Первообразной функции  $[u(x)v(x)]'$  на промежутке  $X$  является функция  $u(x)v(x)$ . По условию теоремы функция  $u'(x)v(x)$  имеет первообразную на этом промежутке. Значит

$$\int u(x)v'(x) dx = \int [u(x)v(x)]' dx - \int v(x)u'(x) dx \text{ или}$$

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Теорема доказана.

Формулу (2) удобнее записывать в виде

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Формула интегрирования по частям позволяет свести вычисление интеграла  $\int u dv$  к вычислению интеграла  $\int v du$ , который может оказаться более простым.

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $\mathfrak{I} = \int \operatorname{arctg}(x) dx$ .

**Решение.** Положим  $\operatorname{arctg}(x) = v(x)$ ,  $u(x) = x$ , тогда

$dv = \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $du = dx$ . По формуле (3) находим

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} &= x \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.\end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл  $\mathfrak{I} = \int x \cos(x) dx$ .

**Решение.** Возьмем  $x = v(x)$ ,  $\sin(x) = u(x)$ , тогда  $dv = dx$ ,  $du = \cos(x) dx$ . По формуле (2) получим

$$\mathfrak{I} = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C.$$

Укажем некоторые типы неопределенных интегралов, которые целесообразно вычислять по формуле интегрирования по частям.

$$\int P_n(x) \ln^m(x) dx, \quad \int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \cos(ax) \\ \sin(ax) \end{array} \right\} dx,$$

$$\int P_n(x) e^x dx, \quad \int e^x \left\{ \begin{array}{l} \cos(bx) \\ \sin(bx) \end{array} \right\} dx,$$

где  $P_n(x)$  – многочлен  $n$ -ой степени,  $m$  – натуральное число,  $a, b$  – вещественные числа.

### § 3. Интегрирование рациональных функций

Пусть требуется проинтегрировать рациональную функцию  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ , где  $P_n(x), Q_m(x)$  многочлены степени  $n$  и  $m$  соответственно. Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ( $n \geq m$ ), то, производя деление, преобразуем рациональную дробь к виду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = H_{n-m}(x) + \frac{S_\ell(x)}{Q_m(x)}, \quad (1)$$

где степень  $\ell$  многочлена  $S_\ell(x)$  строго меньше степени многочлена  $Q_m(x)$ , то есть  $\frac{S_\ell(x)}{Q_m(x)}$  — правильная

рациональная дробь. Поэтому

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int H_{n-m}(x) dx + \int \frac{S_\ell(x)}{Q_m(x)} dx. \quad (2)$$

Первый интеграл в правой части (2) легко вычисляется, а для вычисления второго интеграла необходимо разложить правильную рациональную дробь  $\frac{S_\ell(x)}{Q_m(x)}$  в сумму

простейших дробей. Как известно, простейшие рациональные дроби — это дроби вида  $\frac{A}{(x-a)^k}$ ,

$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$ , где  $A, B, C, p, q$  — вещественные числа,  $k$  —

натуральное число и  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ .

Известно также, что всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей (см §20 гл.1). Поэтому вычисление интеграла от

правильной рациональной дроби сводится к вычислению интегралов от простейших рациональных дробей. Покажем, как вычисляются эти интегралы.

$$J_1 = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k}. \text{ Если } k \neq 1, \text{ то}$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} = \int \frac{d(x-\alpha)}{(x-\alpha)^k} = \frac{1}{1-k} (x-\alpha)^{1-k} + C.$$

$$\text{При } k=1, \int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha| + C. \quad J_2 = \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}.$$

Сначала преобразуют этот интеграл к более простому виду,

$$\text{записав } x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}. \text{ Обозначим } \frac{p}{2} = \beta,$$

$$q - \frac{p^2}{4} = \delta^2, \quad \text{тогда} \quad x^2 + px + q = (x + \beta)^2 + \delta^2 \quad \text{и}$$

$$J_2 = \int \frac{Bx+C}{((x+\beta)^2 + \delta^2)^k} dx. \text{ В интеграле } J_2 \text{ введем новую}$$

переменную по формуле  $x + \beta = t$ , тогда

$$J_2 = \int \frac{Bt + (C - \beta B)}{(t^2 + \delta^2)^k} dt = B \int \frac{t dt}{(t^2 + \delta^2)^k} + (C - \beta B) \int \frac{dt}{(t^2 + \delta^2)^k} =$$

$$= BJ_3 + (C - \beta B)I_k.$$

Интеграл  $J_3$  вычисляется просто

$$J_3 = \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{(t^2 + \delta^2)^k} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + \delta^2)}{(t^2 + \delta^2)^k} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2(1-k)} \frac{1}{(t^2 + \delta^2)^{k-1}} + C, \text{ при } k > 1, \\ \frac{1}{2} \ln|t^2 + \delta^2| + C, \text{ при } k = 1. \end{cases}$$

Вычислим интеграл  $I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + \delta^2)^k}$ . Если  $k=1$ , то

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + \delta^2} = \frac{1}{\delta} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\delta}\right) + C.$$

При  $k > 1$  для вычисления интеграла  $I_k$  применяется рекуррентная формула

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)\delta^2} \frac{t}{(t^2 + \delta^2)^{k-1}} + \frac{2(k-1)-1}{2(k-1)\delta^2} I_{k-1}. \quad (4)$$

Например, полагая в (4)  $k=2$ , найдем

$$I_2 = \frac{1}{2\delta^2} \frac{t}{t^2 + \delta^2} + \frac{1}{2\delta^2} I_1 = \frac{t}{2(t^2 + \delta^2)\delta^2} + \frac{1}{2\delta^3} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\delta}\right) + C.$$

Если положить в (4)  $k=3$ , то найдем  $I_3$  и так далее.

**Вывод:** каждая рациональная функция обладает неопределенным интегралом, выражающимся через рациональные функции, логарифмы и арктангенсы.

**Пример.** Найти интеграл

$$J = \int \frac{x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x + 11}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x - 2} dx.$$

**Решение.** В примерах 1 и 2 §20 гл.1 из подынтегральной функции выделена целая часть, а правильная рациональная дробь представлена суммой простейших дробей.

$$\begin{aligned} & \frac{x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x + 11}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x - 2} = \\ & = x^2 + 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \frac{x^3}{3} + x + \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 4 \operatorname{arctg} x + \\ &+ \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} + c = \end{aligned}$$



$$= \frac{x^3}{3} + x + \ln \frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}} - 4 \operatorname{arctg} x + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} + c.$$

#### § 4. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим некоторые приемы вычисления неопределенных интегралов вида  $\int R(\sin(x), \cos(x)) dx$ , где  $R(\sin(x), \cos(x))$  — рациональная функция аргументов  $\sin(x), \cos(x)$ , например,  $\frac{2 \sin(x)}{1+3 \cos(x)}$ . Такие интегралы

сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ ,  $-\pi < x < \pi$ , при этом —

$$\sin(x) = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $J = \int \frac{dx}{2 + \cos(x)}$ .

**Решение.**  $J = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{2dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка на практике часто приводит к громоздким выкладкам, поэтому в ряде случаев используются другие более удобные подстановки:

если  $R(-\sin(x), \cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x))$ , то  $t = \cos(x)$ ;

если  $R(\sin(x), -\cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x))$ , то  $t = \sin(x)$ ;

если  $R(-\sin(x), -\cos(x)) = R(\sin(x), \cos(x))$ , то  $t = \operatorname{tg}(x)$ .

**Пример 3.** Вычислить  $J = \int \sin^3(x) \cos(x) dx$ .

**Решение.** Так как  $R(-\sin(x), \cos(x)) = -\sin^3(x) \cos(x)$ , то имеет место первый случай. Используем подстановку  $t = \cos(x)$ .

$$\begin{aligned}
 J &= \left| \begin{array}{l} t = \cos(x), \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - t^2, \\ dt = -\sin(x) dx \end{array} \right| = \\
 &= - \int (1 - t^2) t dt = - \int (t - t^3) dt = -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} t^4 + C = \\
 &= -\frac{1}{2} \cos^2(x) + \frac{1}{4} \cos^4(x) + C.
 \end{aligned}$$

**Пример 4.** Вычислить  $J = \int \sin^2(x) \cos^3(x) dx$ .

**Решение.** Поскольку  $R(\sin(x), -\cos(x)) = -\sin^2(x) \cos^3(x)$ , имеет место второй случай. Применяем подстановку  $t = \sin(x)$ .

$$\begin{aligned}
 J &= \left| \begin{array}{l} t = \sin(x), \sin^2(x) = t^2, \\ dt = \cos(x) dx, \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - t^2 \end{array} \right| = \\
 &= \int t^2 (1 - t^2) dt = \int (t^2 - t^4) dt = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 + C = \\
 &= \frac{1}{3} \sin^3(x) - \frac{1}{5} \sin^5(x) + C.
 \end{aligned}$$

**Замечание.** Интегралы  $\int \sin(ax) \cos(bx) dx$ , где  $a, b$  — вещественные числа, вычисляются непосредственно, если их подынтегральную функцию преобразовать по формулам

$$\sin(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$

$$\sin(ax) \sin(bx) = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$

$$\cos(ax) \cos(bx) = \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$$

**Пример 5.** Вычислить  $J = \int \sin(9x) \sin(4x) dx$ .

**Решение.**  $J = \frac{1}{2} \int (\cos(5x) - \cos(13x)) dx =$   
 $= \frac{1}{10} \sin(5x) - \frac{1}{26} \sin(13x) + C.$

### § 5. Интегрирование некоторых иррациональностей

Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  заменой  $t = x + \frac{b}{2a}$

сводятся к интегралам  $\int R_1(t, \sqrt{k^2 - t^2}) dt$  или

$\int R_1(t, \sqrt{t^2 \pm k^2}) dt$ . К последним соответственно

применяются подстановки  $t = k \sin(U)$ ,  $t = ktg(U)$  и  $t = k \sec(U)$ .

В итоге они приводятся к интегралам вида  $\int R_2(\sin(U), \cos(U)) dU$ , которые рассмотрены выше.

**Пример 1.** Вычислить  $J = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}$ .

**Решение.** Выполним подстановку  $x = a \sec(U)$ . Имеем

$$\begin{aligned} dx &= \frac{a \sin(U)}{\cos^2(U)} dU, \quad J = \int \frac{a \sin(U) dU}{\sqrt{(a^2 \sec^2(U) - a^2)^3 \cos^2(U)}} = \\ &= \frac{a}{a^3} \int \frac{\sin(U) \cos^3(U) dU}{\sin^3(U) \cos^2(U)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos(U) dU}{\sin^2(U)} = -\frac{1}{a^2} \frac{1}{\sin U} + C = \\ &= -a^{-2} \left( \sin \left( \arccos \frac{a}{x} \right) \right)^{-1} + C. \end{aligned}$$

Интегралы вида  $\int R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}) dx$ , где  $R(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}})$  — рациональная функция своих аргументов,  $m_i, n_i, i = 1, 2, \dots, k$  — целые числа, рационализируются подстановкой  $x = t^p$ , где  $p$  — общее наименьшее кратное чисел  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Действительно, подставляя  $dx = pt^{p-1} dt$  и  $x = t^p$  в интеграл, приведем его к виду  $\int R_1(t) dt$ , где  $R_1(t)$  — рациональная функция.

Аналогично рационализируются интегралы вида

$$\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}) dx \text{ подстановкой } t^p = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

**Пример 2.** Вычислить  $J = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение. } J &= \int \frac{1}{(x+2)^2} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{\frac{3}{4}} dx = \\ &= \left[ \begin{array}{l} \frac{x+2}{x-1} = t^4, \quad x = \frac{2+t^4}{t^4-1}, \\ dx = \frac{-12t^3 dt}{(t^4-1)^2}, \quad x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1} \end{array} \right] = -\frac{4}{3} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3} t^{-1} + C = \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C.$$

Интегралы вида  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$  не всегда интегрируются в элементарных функциях. Доказано, что интегрирование возможно только в следующих трех случаях:

а)  $p$  — целое; б)  $\frac{m+1}{n}$  — целое; в)  $\frac{m+1}{n} + p$  — целое.

Если выполнено одно из перечисленных условий, то подставкой  $x = t^{\frac{1}{n}}$  интеграл рационализуется или

сводится к интегралу вида  $\int R(t, t^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, t^{\frac{m_k}{n_k}}) dt$ .

**Пример 3.** Вычислить  $J = \int x^{-1} (1+x^{\frac{1}{3}})^{-3} dx$ .

**Решение.** Здесь  $p = -3$ ,  $m = -1$ ,  $n = \frac{1}{3}$  и  $p$  — целое.

Подстановка  $x = t^3$ .

$$\begin{aligned} J &= \left| x = t^3, dx = 3t^2 dt \right| = \int t^{-3} (1+t)^{-3} 3t^2 dt = \\ &= 3 \int \frac{dt}{t(1+t)^3} = 3 \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} \right) dt = \\ &= 3 \left( \ln|t| - \ln|1+t| + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+t)^2} \right) + C = \\ &= 3 \left( \ln \left| \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} \right| + \frac{1}{(1+x^{\frac{1}{3}})} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+x^{\frac{1}{3}})^2} \right) + C = \\ &= 3 \left( \ln \left| \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1+x^{\frac{1}{3}}} \right| + \frac{2+x^{\frac{1}{3}}}{2(1+x^{\frac{1}{3}})^2} \right) + C. \end{aligned}$$

Отметим, что не для всякой функции существует первообразная, выражаемая через элементарные функции,

то есть не всякий неопределенный интеграл выражается через элементарные функции.

Существует бесконечно много интегралов не выражаемых через элементарные функции, например, интегральный

логарифм  $\int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{dU}{\ln(U)}$ , где  $U = e^x$ ,  $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$  —

интегральный синус,  $\int \frac{\cos(x)}{x} dx$  — интегральный косинус,

$\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  — интеграл, встречающийся в теории вероятностей, и многие другие.

## § 6. Определенный интеграл Римана

Понятие определенного интеграла настолько широко применяется в естествознании, что невозможно перечислить все задачи, решение которых основано на применении интеграла Римана. Вот только некоторые из них:

- а) вычислить путь пройденный телом, движущимся со скоростью  $V(t)$ , от момента времени  $t_1$  до момента времени  $t_2$ ;
- б) вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной некоторыми линиями;
- в) вычислить объем тела, ограниченного некоторыми поверхностями;
- г) вычислить координаты центра тяжести произвольной фигуры.

**Определение определенного интеграла. Условие существования.**

Пусть  $y=f(x)$  некоторая функция, определенная на отрезке  $[a, b]$ .

Разобьем этот отрезок на  $n_k$  произвольных частей точками  $a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \dots < x_{i-1}^{(k)} < x_i^{(k)} < \dots < x_{n_k}^{(k)} = b$ .

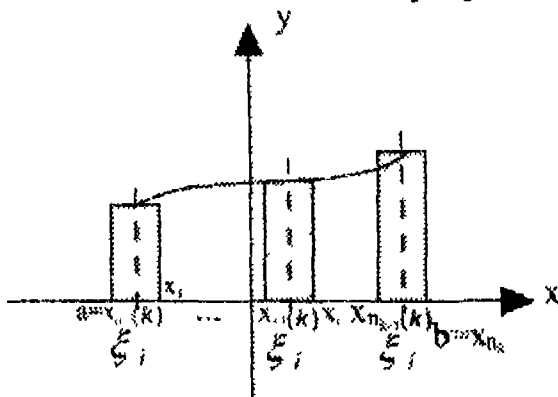
В каждом из полученных частичных отрезков  $[x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$  выберем произвольно точку  $\xi_i^{(k)}$ , ( $x_{i-1}^{(k)} \leq \xi_i^{(k)} \leq x_i^{(k)}$ ), через  $\Delta x_i^{(k)}$  обозначим разность  $x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}$ , то есть  $\Delta x_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}$ . Обозначим это разбиение  $T_k$ .

Образуем сумму

$$\begin{aligned} \sigma_k &= f(\xi_1^{(k)})\Delta x_1^{(k)} + f(\xi_2^{(k)})\Delta x_2^{(k)} + \dots + f(\xi_{n_k}^{(k)})\Delta x_{n_k}^{(k)} = \\ &= \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i^{(k)})\Delta x_i^{(k)} \end{aligned} \quad (1)$$

Сумма (1) называется интегральной суммой для функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , соответствующей разбиению  $T_k$  отрезка  $[a, b]$ .

Если функция  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ , то геометрический смысл



суммы  $\sigma_k$  очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями  $\Delta x_i^{(k)}$  и высотами  $f(\xi_i^{(k)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_k$ . Обозначим через  $\lambda_k = \max_{1 \leq i \leq n_k} (\Delta x_i^{(k)})$  для разбиения  $T_k$ .

**Опр.** Функция  $f(x)$  называется интегрируемой по Риману на отрезке  $[a, b]$ , если существует такое число  $J$ , что для любой последовательности разбиений  $T_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  отрезка  $[a, b]$  такой, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ , и при любом выборе точек  $\xi_i^{(k)} \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$ , существует предел интегральных сумм  $\sigma_k$  равный числу  $J$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i^{(k)}) \Delta x_i^{(k)} = J. \quad (2)$$

Число  $J$  называется интегралом Римана от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначается  $\int_a^b f(x) dx$ .

В обозначении определенного интеграла число  $a$  — называют нижним пределом интегрирования, число  $b$  — верхним пределом интегрирования. Знак интеграла  $\int$  — это стилизованная буква  $S$ , означающая сумму.

Из определения интеграла Римана следует, что его величина зависит только от функции  $f(x)$  и чисел  $a$  и  $b$ . То есть, если заданы  $f(x)$  и пределы интегрирования, то интеграл Римана определяется однозначно.

Отсюда, в частности, следует, что определенный интеграл не зависит от выбора обозначения для аргумента подынтегральной функции  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ .

Кроме того положим  $\int_a^a f(x) dx = 0$ ,  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ .

Отметим, что существуют и другие определенные интегралы, например, интеграл Лебега, Стильтьеса, Радона. Касаться их мы не будем, поэтому в дальнейшем под определенным интегралом будем понимать интеграл Римана.

При вычислении интегралов важно знать, какие функции интегрируемы. Вот необходимое условие интегрируемости.  
**Теорема 1.** Если функция интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке.

**Доказательство.** Допустим, что интегрируемая функция не ограничена на  $[a, b]$ . Тогда она не ограничена хотя бы на одном частичном отрезке разбиения. Пусть это будет



отрезок  $[x_0^{(k)}, x_1^{(k)}]$ . На остальных отрезках точки  $\xi_i^{(k)}, i = 2, \dots, n_k$  выберем произвольно и обозначим

$$\bar{\sigma}_{n_k} = \sum_{i=2}^{n_k} f(\xi_i^{(k)}) \Delta x_i^{(k)}$$

Зададим произвольное число  $M > 0$  и возьмем  $\xi_1^{(k)}$  на

$[x_0^{(k)}, x_1^{(k)}]$  так, чтобы  $|f(\xi_1^{(k)})| \geq \frac{|\bar{\sigma}_{n_k}| + M}{\Delta x_1^{(k)}}$ . Это можно сделать

в силу неограниченности функции  $f(x)$  на  $[x_0^{(k)}, x_1^{(k)}]$ . Тогда

$|f(\xi_1^{(k)})| \Delta x_1^{(k)} \geq |\bar{\sigma}_{n_k}| + M$ . Отсюда, в силу известного

неравенства  $|a + b| \geq |a| - |b|$ ,

$$|\sigma_{n_k}| = |f(\xi_1^{(k)}) \Delta x_1 + \bar{\sigma}| \geq |f(\xi_1^{(k)})| \Delta x_1 - |\bar{\sigma}_{n_k}| \geq M.$$

То есть интегральная сумма  $\sigma_{n_k}$  по абсолютной величине больше любого наперед заданного числа. Поэтому интегральная сумма  $\sigma_{n_k}$  не имеет конечного предела при  $\lambda_k \rightarrow 0$ . Это означает, что определенный интеграл от неограниченной функции не существует и доказывает теорему.

Заметим, что обратная теорема неверна. Ограниченность функции на отрезке  $f(x)$  еще не означает ее интегрируемости. Рассмотрим функцию, называемую функцией Дирихле, на отрезке  $[0, 1]$

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

$d(x)$  ограниченная функция. Однако она не интегрируема на отрезке  $[0,1]$ , так как  $\sigma_{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i^{(k)}) \Delta x_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n_k} 1 \cdot \Delta x_i = 1$ , если все  $\xi_i^{(k)}$  - рациональны. Если все  $\xi_i^{(k)}$  - иррациональны, то

$$\sigma_{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i^{(k)}) \Delta x_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n_k} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Поэтому при  $\lambda_k \rightarrow 0$  интегральная сумма может принимать как значение равное 1, так и значение равное 0. Значит последовательность интегральных сумм предела не имеет.

Из сказанного следует, что для существования определенного интеграла функция  $f(x)$  кроме ограниченности должна обладать дополнительными свойствами, обеспечивающими ее интегрируемость.

Можно доказать, что всякая функция непрерывная на отрезке  $[a, b]$  интегрируема на нем, всякая ограниченная на отрезке  $[a, b]$  функция и непрерывная на нем всюду, за исключением конечного числа точек, интегрируема на отрезке  $[a, b]$ .

Определение интеграла как предела последовательности интегральных сумм, можно использовать для вычисления определенных интегралов.

**Пример.** Вычислить интеграл  $J = \int_0^2 3x dx$  по определению

**Решение.** Так как подынтегральная функция непрерывна, то интеграл существует и не зависит от способа разбиения и выбора точек  $\xi_i$ . Разобьем отрезок  $[0,2]$  на  $n$  частей точками

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{2}{n}, \dots, x_{i-1} = \frac{2(i-1)}{n}, x_i = \frac{2i}{n}, \dots, x_n = 2,$$

здесь  $\Delta x_i = \frac{2}{n}$ . На каждом отрезке  $\left[ \frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n} \right]$  выберем

точку  $\xi_i = \frac{2(i-1)}{n}$ . Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{6(i-1)}{n} \cdot \frac{2}{n}.$$

Перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{12(i-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12(n-1)n}{n^2 \cdot 2} = 6.$$

Получим, что  $\int_0^2 3x dx = 6$ .

## **§ 7. Некоторые свойства определенного интеграла**

Чтобы применять определенный интеграл для решения задач, нужно владеть его свойствами. Рассмотрим некоторые из них.

**Свойства интеграла, выражаемые равенствами.**

а) Каковы бы ни были числа  $a, b$  и  $c$  имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Суть этого свойства состоит в следующем: определенный интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям отрезка. Например,

$$\int_0^{\pi} \sin(2x) dx = \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x) dx.$$

б) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, то есть

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

в) Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, если последние существуют, то есть

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

**Свойства интеграла, выражаемые неравенствами.**

Считаем, что  $a < b$ .

а) Если всюду на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x) \geq 0$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Следует из того, что все слагаемые в интегральной сумме неотрицательны.

б) Если всюду на отрезке  $[a, b]$   $f(x) \leq g(x)$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Вытекает из аналогичного неравенства для интегральных сумм.

в) Для функции  $f(x)$ , определенной на отрезке  $[a, b]$ , имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Следует из того, что абсолютная величина интегральной суммы не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых.

г) Если  $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ , то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \text{ или}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a), \text{ где } m \leq \mu \leq M. \quad (1)$$

Вытекает из неравенства  $m \leq f(x) \leq M$  для всех  $x \in [a, b]$ .  
(Формула среднего значения).

**Теорема.** Если функция непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то на этом отрезке существует точка  $\xi$  такая, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a). \quad (*)$$

**Доказательство.** Запишем формулу (1) из свойства г) в

виде  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \mu$ . Так как число  $\mu$  заключено между

наименьшим и наибольшим значениями непрерывной функции на отрезке  $[a, b]$ ,  $m \leq \mu \leq M$ , то найдется такое число  $\xi \in [a, b]$ , что  $f(\xi) = \mu$ . Отсюда и следует требуемая формула. Теорема доказана.

Запишем формулу (\*) в виде

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (**)$$

(\*\*) называется формулой среднего значения, величина  $f(\xi)$  – среднее значение функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

**Пример.** Оценить интеграл  $J = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \sin^2 x} dx$ .

**Решение.** Так как  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ , то по свойству г) имеем

$$\pi \leq J \leq \pi \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

## § 8. Методы вычисления определенного интеграла

**Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.**

Для того чтобы получить формулу, выражающую величину определенного интеграла через значения первообразной подынтегральной функции в верхнем и нижнем пределах интегрирования, рассмотрим функцию

$$\phi(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Функция (1) называется интегралом с переменным верхним пределом. Аналогично рассматривают интеграл с переменным нижним пределом  $G(x) = \int_x^b f(t) dt, a \leq x \leq b$ .

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то производная от интеграла с переменным верхним пределом по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в точке равной верхнему пределу, т.е.

$$\phi'(x) = \left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

**Доказательство.** Возьмем любое значение  $x \in [a, b]$  и придадим ему приращение  $\Delta x \neq 0$  такое, что  $x + \Delta x \in [a, b]$ .

Запишем значение функции  $\phi(x)$  в точке  $x + \Delta x$ :

$$\phi(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt. \quad \text{Согласно свойству 1а) §7}$$

определенного интеграла имеем

$$\phi(x + \Delta x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = \phi(x) + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

Отсюда получаем

$$\Delta\phi = \phi(x + \Delta x) - \phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \quad (2)$$

В силу свойства г) §7 можно записать  $\Delta\phi = \mu \cdot \Delta x$ , где  $m \leq \mu \leq M$ . Поэтому  $\Delta\phi \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и, следовательно,  $\phi(x)$  непрерывная функция. Запишем среднее значение функции  $\phi(x)$  на  $[x, x + \Delta x]$ .

$$\frac{\Delta\phi(x)}{\Delta x} = f(\xi). \quad (3)$$

Если устремить в (3)  $\Delta x$  к нулю, то  $\xi \rightarrow x$  в силу непрерывности функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , а  $f(\xi) \rightarrow f(x)$ .

Поэтому, переходя к пределу в (3), получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

Следовательно,  $\phi'(x) = f(x)$  и теорема доказана.

Таким образом показано, что любая непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  имеет на этом отрезке первообразные, одной из которых является интеграл с переменным верхним пределом  $\phi(x)$ .

В силу теоремы из §1 любые две первообразные функции  $f(x)$  отличаются на постоянную, поэтому между неопределенным интегралом и интегралом с переменным верхним пределом имеет место связь

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C, \quad (4)$$

$C$  – произвольная постоянная.

Замечание. Во многих случаях приходится рассматривать более общий случай интеграла с переменными пределами

$\psi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt$ , где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  дифференцируемые в точке  $x$  функции, а  $f(t)$  непрерывна на отрезке  $[\alpha(x), \beta(x)]$  (предполагается, что  $\alpha(x) < \beta(x)$ ). Тогда

$$\psi'(x) = -\alpha'(x)f(\alpha(x)) + \beta'(x)f(\beta(x)).$$

**Теорема 2. (Основная теорема интегрального исчисления).** Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то какова бы ни была на этом отрезке ее первообразная  $F(x)$ , справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (5)$$

называемая формулой Ньютона-Лейбница.

**Доказательство.** Согласно предыдущей теореме 1, одной из первообразных функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  является

$\phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Пусть  $F(x)$  — какая-нибудь другая первообразная для функции  $f(x)$  на том же отрезке  $[a, b]$ . В

силу формулы (4) имеем  $\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$ . Подставляя в это равенство  $x=a$ , получим

$$\int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C, \quad C = -F(a).$$

То есть  $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a), x \in [a, b]$ .

Полагая  $x=b$ , найдем

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.



**Замечание.** Определенный интеграл приближенно можно вычислить, используя его определение как предел интегральных сумм. Это как правило, связано с вычислительными трудностями (см. пример 1 в §6).

Формула (5) дает простой способ вычисления определенного интеграла, основанный на вычислении первообразной подынтегральной функции.

**Пример.** Вычислить интеграл  $J = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin(3x) dx$ .

**Решение.**  $\int \sin(3x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x) + C$ , значит,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin(3x) dx &= -\frac{1}{3} \cos(3x) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \\ &= -\frac{1}{3} \left( \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right) = 0. \end{aligned}$$

**Формула замены переменной в определенном интеграле.**

**Теорема 3.** Пусть функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[a, b]$ , функция  $\varphi(t)$  – на отрезке  $[c, d]$ , причем  $\varphi(c) = a$ ,  $\varphi(d) = b$  и множеством значений функции  $\varphi(t)$  является отрезок  $[a, b]$ . Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $\varphi(t)$  непрерывна вместе со своей производной  $\varphi'(t)$  на промежутке  $[c, d]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (6)$$

**Доказательство.** Пусть  $F(x)$  какая-либо первообразная для функции  $f(x)$  на промежутке  $[a, b]$ , тогда сложная функция  $F(\varphi(t))$  является первообразной для функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  на промежутке  $[c, d]$ . Действительно

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница (5) имеем

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Теорема доказана.

Покажем на примере, что формальное применение формулы (6) может приводить к ошибкам.

Например, вычислим интеграл  $J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ , сделав в нем

замену  $x = \frac{1}{t}$ . Можно вычислить формально

$$J = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^{-2}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\arctg(1) + \arctg(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Получили неверный результат. Ошибка в том, что изменению  $x$  на отрезке  $[-1, 1]$  соответствует изменение

$t = \frac{1}{x}$  не на отрезке  $[-1, 1]$ , а на объединении  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ . Поэтому примененная замена переменной не удовлетворяет условиям теоремы.

#### **Формула интегрирования по частям.**

Для вычисления некоторых типов определенных интегралов применяется формула интегрирования по частям. Как нам известно, формула с таким названием применяется и при вычислении неопределенных интегралов.

**Теорема 4.** Если функции  $U(x)$  и  $V(x)$  непрерывны вместе со своими производными на отрезке  $[a, b]$ , то справедлива формула

$$\int_a^b U(x)V'(x)dx = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b V(x)U'(x)dx, \quad (7)$$

которая называется формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.

**Доказательство.** Имеем

$$\int_a^b (UV)' dx = \int_a^b (UV + UV') dx = \int_a^b UV' dx + \int_a^b VU' dx.$$

В предыдущем равенстве все интегралы существуют поскольку подынтегральные функции непрерывны. Для интеграла в левой части по формуле Ньютона-Лейбница

$$\text{имеем} \quad \int_a^b (UV)' dx = U(b)V(b) - U(a)V(a).$$

Подставив последнее выражение в предыдущее равенство, получим формулу (7). Теорема доказана.

Замечание. Часто формулу (7) записывают кратко так

$$\int_a^b U dV = U(x)V(x) \Big|_a^b - \int_a^b V dU. \quad (8)$$

**Пример 3.** Вычислить  $J = \int_0^{\pi/2} x \sin(2x) dx$ .

**Решение.** Положим в формуле (8)  $U=x$ ,  $\sin(2x)dx=dV$ .

Тогда  $dU=dx$  и  $V = \int \sin(2x)dx = -\frac{1}{2} \cos(2x)$ .

$$\begin{aligned} \text{Имеем } J &= x \left( -\frac{1}{2} \cos(2x) \right) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{2} \cos(2x) dx = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin(2x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

## § 9. Некоторые приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры в ДПСК (декартова прямоугольная система координат).

Геометрический смысл определенного интеграла, как известно, площадь криволинейной трапеции

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,  $a < b$  и  $f(x) \leq 0$ . Тогда  $-f(x) \geq 0$  на отрезке  $[a, b]$ .

Поэтому

$$\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx = S, \quad (1)$$

где  $S$  площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком  $[a, b]$  на оси  $OX$ , отрезками  $aA$  и  $aB$  прямых параллельных оси  $OY$  и куском графика функции  $-f(x)$ .

Часто уравнение линии, ограничивающей криволинейную трапецию, задается в параметрической форме  $x = \varphi(t), y = \psi(t), t_0 \leq t \leq t_1$ , причем  $\varphi(t_0) = a, \psi(t_1) = b$ . Тогда формула (1) принимает вид

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt \quad (2)$$

**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом  $x = 2 \cos t, y = 3 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Решение.** Эллипс симметричен относительно координатных осей. Поэтому достаточно вычислить площадь части фигуры, расположенной в первой четверти, и результат учетверить.

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^2 y dx = 4 \int_{\pi/2}^0 3 \sin t d(2 \cos t) = 24 \int_{\pi/2}^0 -\sin^2 t dt = \\ &= -12 \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos 2t) dt = -12 \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\pi/2}^0 = +12 \left( \frac{\pi}{2} \right) = 6\pi. \end{aligned}$$

## 2. Площадь в полярной системе координат.

Напомним понятие полярной системы координат. Выберем на плоскости точку  $O$  и назовем ее полюсом. Проведем через эту точку луч — полярную ось (см.рис.).



Каждая точка плоскости в этой системе координат описывается парой чисел:  $\varphi$  — угол отсчитанный в положительном направлении от полярной оси до отрезка, соединяющего полюс с рассматриваемой точкой, и  $r$  — расстояние от точки до полюса. Точка  $M$  имеет координаты  $(r, \varphi)$ ,  $r = |OM|$ . От полярной системы координат к ДПСК можно перейти по формулам

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi. \quad (3)$$

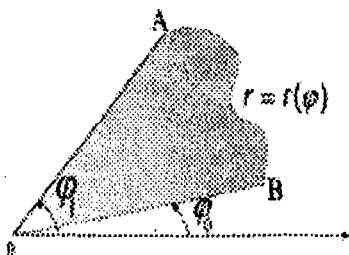
От ДПСК к полярной системе координат переходят по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, x \neq 0, \dots$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ при } x = 0, y > 0, \varphi = \frac{3\pi}{2}, \text{ при } x = 0, y < 0. \quad (4)$$

Обычно линии в полярной системе координат задаются уравнениями  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ .

Пусть функция  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$  непрерывна и неотрицательна. Плоская фигура, ограниченная частью кривой  $r = r(\varphi)$ , и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  (см.рис.), называется **криволинейным сектором**.



Можно вывести формулу площади криволинейного сектора OAB, которая имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r(\varphi))^2 d\varphi \quad (5)$$

**Пример 2.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первыми двумя витками спирали Архимеда  $r = 2\varphi$  (см.рис.)



**Решение.** Первые два витка спирали Архимеда получаются, когда аргумент  $\varphi$  меняется в пределах от 0 до  $4\pi$ . По

формуле (5) получаем 
$$S = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} 4\varphi^2 d\varphi = \frac{2}{3} \varphi^3 \Big|_0^{4\pi} = \frac{128}{3} \pi^3.$$

### 3. Вычисление длин дуг.

Из дифференциального исчисления известно: если кривая задана параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  и функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  дифференцируемы, то дифференциал дуги этой кривой выражается формулой

$$d\ell = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt, \quad (6)$$

где  $\ell = \ell(t)$  длина дуги как функция параметра  $t$ .

Длина дуги этой кривой между точками  $t_0$  и  $t_1$  вычисляется по формуле

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} d\ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (7)$$

**Пример 3.** Вычислить длину первого витка винтовой линии  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Решение.** По формуле (2) имеем

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Пусть плоская кривая задана уравнением  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Чтобы получить формулу для длины дуги этой

кривой на участке  $a \leq x \leq b$ , выберем в качестве параметра переменную  $x$ . Тогда  $x = x, y = f(x), z = 0, a \leq x \leq b$  — параметрические уравнения этой кривой. Формулы (6) и (7) соответственно приобретают вид

$$dl = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \quad (6')$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (7')$$

**Пример 4.** Вычислить длину дуги кривой  $y = x^{3/2}$ , если  $0 \leq x \leq 2$ .

**Решение.** По формуле (7') получаем

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{8}{27} \left( \left(\frac{11}{2}\right)^{3/2} - 1 \right).$$

Кривая, длину дуги которой нужно вычислить, может быть задана уравнением в полярной системе координат  $r = r(t), t_0 \leq t \leq t_1$ . В этом случае ее параметрические уравнения имеют вид:  $x = r \cos t, y = r \sin t$ , где  $r = r(t)$ , а угловая переменная  $t$  играет роль параметра. Имеем

$$x'_t = -r \sin t + r' \cos t, y'_t = r' \sin t + r \cos t. \quad (8)$$

Поставляя (8) в (6) и (7), приходим к формулам

$$dl = \sqrt{r^2 + (r')^2} dt. \quad (6'')$$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r^2 + (r')^2} dt. \quad (7'')$$

**Пример 3.** Вычислить длину первого витка спирали Архимеда  $r = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

**Решение.** По формуле (7'') находим

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\varphi^2 + 9} d\varphi = 3 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = \left| \begin{array}{l} \varphi = shz, 1 + sh^2 z = ch^2 z, \\ d\varphi = chz dz \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2} \left( \operatorname{arsh} 2\pi + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2(\operatorname{arsh} 2\pi) - 0 \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \left( \operatorname{arsh} 2\pi + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2(\operatorname{arsh} 2\pi) \right)$$

#### 4. Вычисление объемов тел вращения.

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна и неотрицательна на отрезке  $[a, b]$ . Тогда тело, которое образуется вращением относительно оси  $OX$  криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции  $f(x)$ , имеет объем равный

$$v = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (9)$$

Нестрогое рассуждение действительно приводит к формуле (9). Все точки криволинейной трапеции описывают окружности радиуса  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Площадь  $S(x)$  каждого сечения тела вращения плоскостью перпендикулярной оси  $OX$  равна  $S(x) = \pi f^2(x)$ . Суммируя функцию  $S(x)$  в пределах от  $a$  до  $b$ , получаем

$$v = \int_a^b S(x) dx, \text{ т.е. формулу (9)}$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиками двух функций, например,  $f(x)$  и  $g(x)$ , то для объема тела вращения приходим к формуле

$$v = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx. \quad (10)$$



## § 10. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Определенный интеграл был введен как предел последовательности интегральных сумм. При этом мы предполагали, что отрезок интегрирования конечен, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке.

Обобщая понятие определенного интеграла на случай бесконечного промежутка интегрирования, приходят к новому понятию – несобственному интегралу 1-го рода.

**Опр.** Пусть функция  $f(x)$  определена на промежутке  $[a, +\infty)$  и интегрируема на любом отрезке  $[a, R]$ . Тогда,

$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx$  называют несобственным интегралом первого

рода и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (1)$$

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx. \quad (2)$$

Если предел (2) конечен, то говорят, что несобственный интеграл (1) сходится. В противном случае интеграл (1) расходится.

Аналогично вводится понятие несобственного интеграла по промежутку  $(-\infty, b]$ :

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^b f(x) dx. \quad (3)$$

В том случае, когда подынтегральная функция  $f(x) \geq 0$ , несобственные интегралы (2), (3) можно истолковать как площадь неограниченной криволинейной трапеции.

Если существуют оба интеграла (2) и (3), то можно определить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow -\infty} \int_{R_1}^c f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow +\infty} \int_c^{R_2} f(x) dx, \quad (4)$$

где  $c$  — любое число.

**Пример 1.**

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^R = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} R - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 2. } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx &= \lim_{\substack{R_2 \rightarrow +\infty \\ R_1 \rightarrow -\infty}} \int_{R_1}^{R_2} \sin x dx = \lim_{\substack{R_2 \rightarrow +\infty \\ R_1 \rightarrow -\infty}} (-\cos x) \Big|_{R_1}^{R_2} = \\ &= \lim_{\substack{R_2 \rightarrow +\infty \\ R_1 \rightarrow -\infty}} (-\cos R_2 + \cos R_1). \end{aligned}$$

Так как предел функции  $-\cos R$  при  $R \rightarrow \pm\infty$  не существует, то этот интеграл расходится.

**Пример 3.** При каких значениях  $\alpha$  сходится интеграл

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

$$\text{Решение. Если } \alpha = 1, \text{ то } J = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^R =$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \ln|R| = \infty. \text{ Если же } \alpha \neq 1, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} J &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (R^{1-\alpha} - 1) = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha}, & \text{при } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{при } \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

Главное значение интеграла (4) определяется так

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (5)$$

Заметим, что интеграл, рассмотренный в примере 2, существует в смысле главного значения. Действительно, по

$$\text{формуле (5) } v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} (-\cos R + \cos R) = 0.$$

Для вычисления несобственного интеграла нужно знать первообразную подынтегральной функции. Поскольку для подавляющего большинства функций их первообразные не выражаются через элементарные функции, то огромное значение имеют методы, позволяющие устанавливать сходимость или расходимость несобственных интегралов без вычисления первообразных. Приведем два таких критерия.

1. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  неотрицательны и для  $a \leq x < +\infty$  справедливо неравенство  $f(x) \leq g(x)$ , то из

сходимости  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  следует сходимость  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , а из

расходимости  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  следует расходимость  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ .

2. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  неотрицательны и существует предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$  ( $0 \leq k \leq +\infty$ ), то при

$0 < k < +\infty$  оба интеграла либо сходятся, либо расходятся,

при  $k = 0$  из сходимости  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  следует сходимость

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , при  $k = +\infty$  из сходимости  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  следует сходимость  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ .

### Абсолютная сходимость несобственного интеграла.

Интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  называется абсолютно сходящимся,

если сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ . Если интеграл

сходится абсолютно, то он и просто сходится, поскольку

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx.$$

**Пример 4.** Исследовать на сходимость интеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (\text{Гамма-функция Эйлера}) \quad \text{при } \alpha - 1 > 0.$$

**Решение.** При  $x \gg 1$   $x^{\alpha-1} < x^n$ , где  $n = [\alpha]$  — целая часть

числа. Поэтому  $\Gamma(\alpha) \leq \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ . Проинтегрируем

последний интеграл по частям

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

После  $n$ -кратного интегрирования по частям получим

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -n! e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = n!.$$

Поэтому  $\Gamma(\alpha) \leq n!$ . Значит, наш интеграл сходится при любом  $\alpha - 1 > 0$ .

## § 11. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция  $f(x)$  неограничена на конечном промежутке  $[a, b]$  и пусть в любом промежутке  $[a, b - \varepsilon]$ , где  $0 < \varepsilon < b - a$  функция  $f(x)$  ограничена и интегрируема. В этом случае точка  $b$  называется особой точкой функции  $f(x)$ .

**Опр.1.** Предел интеграла  $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  называется несобственным интегралом второго рода от функции  $f(x)$  по промежутку  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (1)$$

В том случае, когда предел (1) конечен, говорят, что интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится, если же предел (1) бесконечен

или не существует, то говорят, что интеграл расходится.

Аналогично, если  $a$  единственная особая точка функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и функция  $f(x)$  интегрируема на любом отрезке  $[a + \varepsilon, b]$ ,  $0 < \varepsilon < b - a$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (2)$$

Наконец, пусть единственная особая точка  $x = c$  функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  лежит внутри интервала ( $c \in (a, b)$ ), тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx. \quad (3)$$

В этом случае интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  называется сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (3).

**Главное значение интеграла**  $\int_a^b f(x)dx$ . Пусть  $x=c$  единственная особая точка функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  лежит внутри этого отрезка и  $f(x)$  интегрируема на отрезках  $[a, c-\varepsilon]$  и  $[c+\varepsilon, b]$ , тогда, по определению главное значение этого интеграла есть

$$V.P. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (4)$$

**Пример 1.** Выяснить, при каких  $\alpha$  интеграл  $J_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$

сходится, а при каких расходится.

**Решение.** Пусть  $\alpha = 1$ , тогда

$$J_1 = \int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\ln|b-x| \Big|_a^{b-\varepsilon} \right) = \\ = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln \varepsilon - \ln|b-a|] = \infty. J_1 \text{ расходится.}$$

Если  $\alpha \neq 1$ , тогда

$$J_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{1-\alpha} (b-x)^{1-\alpha} \Big|_a^{b-\varepsilon} = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{1-\alpha} [\varepsilon^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}] = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{при } \alpha < 1, \\ \infty, & \text{при } \alpha > 1. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл  $J_\alpha$  сходится при  $\alpha < 1$  и расходится при  $\alpha \geq 1$ .

**Пример 2.** Показать, что интеграл  $J = \int_a^b \frac{dx}{c-x}$ ,  $a < c < b$

сходится в смысле главного значения.

**Решение.** По формуле (4) имеем

$$\begin{aligned} V.P. J &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{c-x} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{c-x} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-\ln \varepsilon + \ln|c-a| - \ln|b-c| + \ln \varepsilon] = \ln \left| \frac{c-a}{b-c} \right|. \end{aligned}$$

Как и в случае с несобственными интегралами первого рода, важное значение имеют критерии сходимости интегралов второго рода.

1. Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  неотрицательны на  $[a, b)$  и  $f(x) \leq g(x)$  тогда:

1) если интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  сходится, то сходится и интеграл

$$\int_a^b f(x) dx;$$

2) если интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  расходится, то расходится и

$$\text{интеграл } \int_a^b g(x) dx.$$

2. Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  неотрицательны на полуинтервале  $[a, b)$ ,  $g(x) \neq 0$  при  $x \in [a, b)$  и существует

предел  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ , ( $0 \leq k \leq +\infty$ ), тогда:

1) если  $(0 \leq k < +\infty)$  и интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  сходится, то

сходится и интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ ;

2) если  $(0 < k \leq +\infty)$  и интеграл  $\int_a^b g(x) dx$  расходится, то

расходится и интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ ;

3) при  $(0 < k < +\infty)$  оба интеграла вместе сходятся или расходятся.

Подынтегральная функция  $f(x)$  может быть и отрицательной на  $[a, b]$ . В этом случае применяется понятие абсолютной сходимости.

**Опр.2.** Несобственный интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  называется

абсолютно сходящимся, если сходится интеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$ .

Если интеграл сходится абсолютно, то он и просто сходится. Заметим, что интеграл может сходиться, но не сходиться абсолютно. Тогда он называется условно сходящимся.

**Пример 3.**  $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

**Решение.** Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , то, доопределив

подынтегральную функцию при  $x = 0$  единицей, получим функцию, интегрируемую на любом отрезке  $[0, b]$ ,  $b > 0$ .

Покажем, что интеграл не является абсолютно сходящимся. Имеем



$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_0^1 \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx + \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx.$$

Первый интеграл справа существует. Покажем, что второй расходится. Так как  $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ , то

$$\int_0^R \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \frac{1}{2} \int_1^R \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^R \frac{\cos 2x}{x} dx. \quad (4)$$

Интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$  расходится и равен  $+\infty$ . Интеграл же

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$  сходится, поскольку, интегрируя по частям,

имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\sin 2x) = \frac{\sin 2x}{2x} \Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \sin 2x d\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= -\frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

В силу этой формулы, сходимость интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$

следует из сходимости интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$ . Сходимость

последнего вытекает из неравенства  $\left| \frac{\sin 2x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ . Переходя

к пределу в неравенстве (4) при  $R \rightarrow +\infty$ , получаем, что

$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq +\infty$ . Это доказывает расходимость интеграла

$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ . Сам же интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  сходится.

**Упражнение.** Воспользовавшись предыдущим рассуждением, докажите сходимость интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

Указание: проинтегрируйте по частям

## § 12. Приближенное вычисление определенных интегралов

Вычисление определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница в том случае, когда первообразная подынтегральной функции выражается через элементарные функции, или с помощью некоторых искусственных приемов, которые нами не рассматривались, применимо только к довольно узкому классу интегралов.

В остальных случаях для вычисления определенных интегралов прибегают к методам приближенного вычисления. Пусть необходимо вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ где } f(x) \text{ непрерывная на отрезке } [a, b] \text{ функция.}$$

Разобьем отрезок  $[a, b]$  точками на  $n$  отрезков одинаковой длины

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b, \quad (1)$$

где  $x_i - x_{i-1} = h, i = 1, 2, \dots, n$ . Поэтому  $x_i = x_0 + ih$ .

Среди всех алгебраических многочленов степени не выше  $n$  существует многочлен, называемый интерполяционным многочленом Лагранжа, который в точках  $x_i$  совпадает с данной функцией. В остальных точках отрезка  $[a, b]$  приближенно полагают  $f(x) \approx L_n(x)$ . Интерполяционный многочлен Лагранжа  $L_n(x)$  имеет вид

$$L_n(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \\
 &+ f(x_n) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Если ввести обозначения  $\frac{x-x_0}{h} = t$  и  $f(x_i) = y_i$ , то (2)

записывается так

$$L_n(x) = L_n(x_0 + h) = (-1)^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{c_n^i y_i}{t-i}. \tag{3}$$

На отрезке  $[a, b]$  приближенно полагают

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx. \tag{4}$$

Используя (4), можно получить различные приближенные формулы для вычисления определенного интеграла.

**Формула прямоугольников.** Отрезок  $[a, b]$  делят на  $m$  частей  $[x_{i-1}, x_i]$  и на каждой из них функцию  $f(x)$  заменяют интерполяционным многочленом

$$L_0(x) = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right), \text{ тогда}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^m f\left(a + \frac{h}{2}(2i-1)\right). \tag{5}$$

Погрешность формулы (5) оценивается с помощью остаточного члена  $R_1 = \frac{(b-a)^3}{24m^2} f'(\xi)$ ,  $a \leq \xi \leq b$

**Формула трапеций.** Если на каждом частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  функцию  $f(x)$  заменить интерполяционным многочленом  $L_1(x)$ , построенным по точкам  $x_{i-1}$  и  $x_i$ , то для интеграла получим

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2m} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)]. \quad (6)$$

Остаточный член формулы (6), называемой формулой трапеции, есть  $R_2 = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi)$ .

**Формула Симпсона (формула парабол).** Наконец, заменим на каждом отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$ , которых в данном случае  $2m$ , функцию  $f(x)$  многочленом Лагранжа  $L_2(x)$  второй степени, построенным по точкам  $x_{i-1}, \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i), x_i$ .

Тогда для вычисления интеграла имеет место формула

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})]. \quad (7)$$

Остаточный член формулы Симпсона таков

$$R_3 = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{IV}(\xi).$$

Из сравнения остаточных членов этих трех формул видим, что при данном числе точек разбиения наиболее точной является формула Симпсона.

# Глава 5. Числовые и функциональные ряды

## §1. Числовые ряды

Пусть  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  бесконечная числовая последовательность с вещественными или комплексными членами.

**Опр.1.** Выражение  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  (1)

называется числовым рядом, числа  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  — элементами (членами) ряда. Формула  $u_n$ , по которой в зависимости от номера члена ряда получается числовое значение этого члена, называется общим членом ряда.

**Опр.2.** Сумма  $n$  первых членов ряда (1) называется  $n$ -й частичной суммой этого ряда. Например,  $s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, s_3 = u_1 + u_2 + u_3$  — первая, вторая, третья частичные суммы ряда. Очевидно, что частичные суммы составляют бесконечную последовательность  $\{s_n\}_1^{\infty}$ .

**Опр.3.** Ряд (1) называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  (2), Этот предел  $s$  называется суммой ряда (1).

Если предел (2) не существует или бесконечен, то ряд (1) называется расходящимся.

**Опр.4.** Ряд  $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ , членами которого являются все члены ряда (1), начиная с  $(n+1)$ -го, без изменения их порядка, называется  $n$ -м остатком ряда (1).

Обозначают  $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ .

**Пример 1.** Исследовать на сходимость ряд, полученный суммированием членов бесконечной геометрической

прогрессии,  $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$ ,

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n. \quad (3)$$

**Решение.** Если  $q \neq 1$ , то частичная сумма ряда (3) будет

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}. \quad \text{Пусть } |q| < 1, \quad \text{тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} =$$

$= \frac{a}{1 - q}$ . Следовательно, ряд (3) сходится. Пусть  $|q| > 1$ , тогда

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$  и ряд (3) расходится.

При  $q = 1$  получим ряд  $a + a + a + \dots$ ,  $s_n = na$ . Очевидно, такой ряд расходится.

При  $q = -1$ , получим ряд  $a - a + a - a + \dots$ .

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ a, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Очевидно,  $s_n$  предела не имеет и ряд расходится.

**Теорема 1.** Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится его некоторый остаток.

**Доказательство.** Пусть  $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  — частичная сумма ряда, а  $s_k^m = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+k}$  — частичная сумма  $m$ -го остатка ряда. Очевидно,  $s_n = s_m + s_k^m$  при  $n = m + k$  (4).

Из (4) при фиксированном  $m$  следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  существует тогда и только тогда, когда существует  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k^m$ .

Теорема доказана.

**Следствие.** Отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

**Пример 2.** Доказать, что ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  сходится и найти его сумму.

**Решение.** В § 9 гл.3 получена формула Тейлора для функции  $e^x$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + r_n(x), \quad (5)$$

и доказано, что  $r_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Подставляя в (5)  $x=1$ , получаем

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + r_n = s_n + r_n. \quad (6)$$

Здесь  $s_n$  – частичная сумма полученного числового ряда, а остаточный член  $r_n = r_n(1)$  является  $n$ -ым остатком этого ряда. Поскольку при всех  $x$   $r_n \rightarrow 0$ , то, согласно теореме 1, ряд сходится, а его сумма равна  $e$ .

**Теорема 2.** (Необходимое условие сходимости). Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится, то } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

**Доказательство.** Так как ряд сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ .

Очевидно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s$ . Вычитая из первого равенства второе, получим  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = 0$ , или  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд расходится.

**Доказательство** от противного.

**Пример 3.** Исследовать на сходимость гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

**Решение.**  $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ .

Предположим, что гармонический ряд сходится. Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ , но  $s_{2n} - s_n > \frac{1}{2}$  при любом  $n$ . Получили противоречие. Следовательно, наше предположение о сходимости гармонического ряда неверное. Он расходится.

Отметим без доказательства следующие свойства сходящихся рядов.

1. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda s$ , т.е. сходящиеся ряды можно умножать на число.

2. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$ . т.е.

сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать. Сходящиеся ряды обладают сочетательным (ассоциативным) свойством. Если объединить члены сходящегося ряда в произвольные группы, заключая члены ряда в скобки, не меняя их местоположения, то сумма ряда не изменится. Заметим, что опускать скобки нельзя. Например, ряд  $(1-1)+(1-1)+\dots$  сходится, а ряд  $1-1+1-1+\dots$  расходится.

## § 2. Ряды с неотрицательными членами

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  с действительными членами  $u_n \geq 0$  или  $u_n \leq 0$ . Такие ряды называются знакопостоянными.

Если  $u_n \leq 0$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ . Поэтому достаточно рассмотреть ряды с неотрицательными членами  $u_n \geq 0$ .



**Теорема 1.** Необходимым и достаточным условием сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  с неотрицательными членами является ограниченность последовательности его частичных сумм.

**Доказательство.** Пусть ряд сходится. Тогда по определению сходимости ряда последовательность его частичных сумм  $\{s_n\}$  сходится. Но всякая сходящаяся последовательность ограничена (см. § 2 гл.2). Необходимость доказана.

Пусть последовательность частичных сумм  $\{s_n\}$  ограничена сверху. Поскольку  $u_n \geq 0$ , то  $s_{n+1} = s_n + u_{n+1} \geq s_n$ , т.е. последовательность частичных сумм монотонно возрастающая. Но монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел (см. § 2 гл.2), т.е. ряд сходится. Достаточность доказана. Теорема доказана.

**Теорема 2. (Признак сравнения).** Пусть даны два ряда с неотрицательными членами. Обозначим их  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и

$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Если существует номер  $N$  такой, что

$\forall n > N \ a_n \leq b_n$ , то из сходимости ряда  $B$  следует сходимость ряда  $A$ , а из расходимости ряда  $A$  - расходимость ряда  $B$ .

**Доказательство.** Поскольку отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, то будем считать, что неравенство  $a_n \leq b_n$  выполняется для всех  $n$ , начиная с единицы. Тогда из неравенства  $a_n \leq b_n$  следует неравенство  $A_n \leq B_n$ , где  $A_n$  и  $B_n$  - частичные суммы рядов  $A$  и  $B$ .

Пусть ряд  $B$  сходится. Тогда по теореме 1  $B_n \leq M \quad \forall n \geq 1$ . Поскольку  $A_n \leq B_n \leq M$ , то  $A_n \leq M$ , т.е. частичные суммы ряда  $A$  ограничены. Следовательно, согласно теореме 1, ряд  $A$  сходится. Первая часть теоремы доказана. Вторую часть доказать самостоятельно.

**Теорема 3. (Предельный признак сравнения).** Если  $a_n \geq 0, b_n > 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q \neq 0$  и  $q \neq \infty$ , то оба ряда  $A$  и  $B$  сходятся или расходятся одновременно. (Без доказательства).

**Пример 1.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$ .

**Решение.** Так как  $\frac{1}{n - \ln n} > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 3$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится (см. Пр.3 § 1), то согласно теореме 2 данный ряд расходится.

**Пример 2.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}, 0 < x < 3\pi$ .

**Решение.**  $2^n \sin \frac{x}{3^n} \sim x \left(\frac{2}{3}\right)^n$  при  $n \rightarrow \infty$ , но ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} x \left(\frac{2}{3}\right)^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  сходится как сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Согласно теореме 3 данный ряд сходится при любых значениях  $x$  из указанного интервала.

**Теорема 4. (Радикальный признак Коши).** Пусть для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell. \quad (1)$$

Тогда при  $\ell < 1$  ряд сходится, а при  $\ell > 1$  — расходится.

**Доказательство.** Сравним ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  с рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  таким, что  $\ell < q < 1$ . Перепишем (1) иначе —

$$\left| \sqrt[n]{u_n} - \ell \right| < \varepsilon \quad \text{при } \forall n > N. \quad (1')$$

Поскольку  $\varepsilon > 0$  в (1') произвольное, то положим  $\varepsilon = q - \ell$ .

Тогда  $\left| \sqrt[n]{u_n} - \ell \right| < q - \ell$ ,  $\sqrt[n]{u_n} < q$ ,  $u_n < q^n$ ,  $\forall n > N$ . Согласно признаку сравнения данный ряд сходится. Первая часть теоремы доказана.

Пусть  $\ell > 1$ , тогда из (1) следует, что  $\sqrt[n]{u_n} > 1$ ,  $u_n > 1 \quad \forall n > N_1$ . А это означает, что не выполняется необходимое условие сходимости ряда, т.е. ряд расходится. Теорема доказана.

**Теорема 5. (Признак Даламбера).** Пусть для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $u_n > 0$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell. \quad (2)$$

Тогда при  $\ell < 1$  ряд сходится, а при  $\ell > 1$  — расходится. (Без доказательства).

**Пример 4.** Исследовать на сходимость ряды  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

**Решение.** К первому ряду применим радикальный признак Коши, а ко второму признак Даламбера. В результате получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Т.к. оба предела меньше единицы, то оба ряда сходятся.

**Теорема 6. (Интегральный признак Коши).** Пусть ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad (3)$$

где функция  $f(x)$  неотрицательная и монотонно убывающая на полуинтервале  $[1, \infty)$ . Тогда, если

несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  (4) сходится, то ряд (3)

сходится; если интеграл (4) расходится, то и ряд (3) расходится.

**Доказательство.** Пусть  $k \leq x \leq k+1$ . В силу монотонного убывания функции  $f(x)$  имеем

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Т.к. неравенства можно интегрировать, то из (5) получим

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k). \quad (6)$$

Суммируя неравенства (6) от  $k=1$  до  $k=n$ , получим

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k), \text{ или}$$

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n. \quad (7)$$

Пусть интеграл (4) сходится, т.е.  $\int_1^{\infty} f(x) dx = S$ , тогда из (7)

получим

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \int_1^{\infty} f(x) dx = S, \text{ или } S_{n+1} < S + f(1),$$

т.е. последовательность частичных сумм ряда (3) ограничена. По теореме 1 ряд (3) сходится.

Пусть интеграл (4) расходится, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \infty$ .

Тогда из (7) видно, что  $S_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx$ , т.е. частичные суммы ряда (3) не ограничены. По теореме 1 ряд расходится. Теорема доказана.

**Следствие.** Пусть интеграл (4) сходится, тогда суммируя неравенства (6) от  $k = n$  и переходя к пределу, получим

$$\sum_{k=n}^{\infty} f(k+1) = r_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx. \quad (8)$$

Из (8) следует, что заменяя сумму ряда его частичной суммой  $S_n$ , мы делаем ошибку, не превосходящую величины  $\int_n^{\infty} f(x) dx$ .

**Упражнение 1.** Пользуясь интегральным признаком Коши, доказать, что ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

**Упражнение 2.** Почему ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-|\sin n|}$  расходится?

### § 3. Знакопеременные ряды.

#### Абсолютная и условная сходимости ряда

Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  имеет вещественные члены, но знаки их могут быть разные. Такой ряд называют знакопеременным. Если знаки строго чередуются, то ряд называют знакочередующимся. Его можно записать так

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, u_n > 0. \quad (1)$$

**Теорема 1. (Лейбница).** Если члены знакочередующегося ряда (1) монотонно убывают по абсолютной величине  $u_{n+1} < u_n$  и  $u_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то ряд (1) сходится и его сумма не превосходит первого члена.

**Доказательство.** Рассмотрим сначала четные частичные суммы  $S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2m-1} - u_{2m} =$   
 $= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m})$ .

Поскольку  $(u_{2m-1} - u_{2m}) > 0$ , то последовательность  $\{S_{2m}\}$  монотонно возрастает. С другой стороны,

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} < u_1, \quad (2)$$

т.е. эта последовательность ограничена. По теореме о монотонной ограниченной последовательности (см. § 2 гл.2) она имеет предел. Пусть  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ .

Рассмотрим теперь нечетные частичные суммы  $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$ . В последнем равенстве перейдем к пределу  $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = S$ .

Таким образом, при любых  $n$  (четных и нечетных) последовательность частичных сумм имеет один и тот же предел  $S$ . Из (2) следует, что сумма ряда не превышает  $u_1$ .

Теорема доказана.

**Замечание.** Если ряд (1) удовлетворяет теореме Лейбница, то ей удовлетворяет и  $n$ -й его остаток ряда

$r_n = \pm \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1-n} u_k$ . Тогда сумма остатка не превосходит

величины первого члена, т.е.  $|r_n| < u_{n+1}$ . Это значит, что заменяя сумму такого ряда на частичную сумму  $S_n$ , мы делаем ошибку, не превышающую величины первого отброшенного члена. Уточняя оценку, найдем, что  $S_{2k} \leq S < S_{2k-1}$ .

**Опр.1.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  ( $u_n$  могут быть комплексными числами) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ .

**Теорема 2.** Если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится. (Без доказательства).

**Замечание.** Все рассмотренные в § 2 достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами можно использовать для определения абсолютной сходимости ряда.

**Пример 1.** Исследовать на сходимость знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ .

**Решение.** Поскольку  $\frac{|\sin(n^2)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится (см. Упражнение к § 2), то по признаку сравнения данный ряд сходится абсолютно.

**Опр.2.** Сходящийся знакопередающийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называется условно сходящимся, если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  расходится.

**Пример 2.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ .

**Решение.** По признаку Лейбница ряд сходится, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится. Следовательно, данный ряд сходится условно.

Отметим без доказательства свойства абсолютно сходящихся рядов.

1. Абсолютно сходящиеся ряды обладают переместительным (коммутативным) свойством, т.е. члены таких рядов можно менять местами, сумма при этом не меняется. Если ряд сходится условно, то, меняя порядок суммирования, мы можем как угодно изменить его сумму.

2. Если ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$  сходятся абсолютно к своим суммам  $S_1$  и  $S_2$ , то ряд, составленный из всевозможных произведений  $u_n v_n$ , также сходится абсолютно и его сумма равна  $S_1 S_2$ .

3. Если члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  комплексные числа  $u_n = a_n + ib_n$ , то из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  следует сходимость рядов



$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Наоборот, из сходимости рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

**Пример 4.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ .

**Решение.**  $u_n = \frac{1}{n} i^n = \frac{1}{n} e^{i\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{n} \cos \frac{\pi}{2}n + i \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2}n$ . Ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{\pi}{2}n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2}n$  сходятся по признаку Лейбница.

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |i^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  — расходится. Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

сходится условно.

## § 4. Функциональные последовательности и ряды

Рассмотрим последовательность функций

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x), \dots, \quad (1)$$

каждая из которых определена на некотором числовом множестве  $X$ . Множество  $X$  может быть множеством комплексных чисел, его элементы будем называть точками. Функциональная последовательность (1) называется сходящейся в точке  $x_0 \in X$ , если соответствующая числовая последовательность  $S_1(x_0), S_2(x_0), \dots, S_n(x_0), \dots$  сходится. Если последовательность (1) сходится в каждой точке некоторого множества  $E \subset X$ , то последовательность называется сходящейся на множестве  $E$ . Очевидно, она определяет на множестве  $E$  некоторую функцию  $S(x)$  такую, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) \forall x \in E$ . Это так

называемая точечная (поточечная) сходимость последовательности  $\{S_n(x)\}$  к функции  $S(x)$ .

На множестве функций  $S_n(x)$  и  $S(x)$  введем метрику  $\rho(S_n, S) = \|S_n(x) - S(x)\|$ .

**Опр.1.** Последовательность  $\{S_n(x)\}$  называется сходящейся к функции  $S(x)$  по метрике, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(S_n, S) = 0$ . Будем

писать  $S_n(x) \xrightarrow{\rho} S(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ .

Так как метрику можно ввести разными способами, то рассматривают и разные виды сходимости по метрике. В частности, если метрику ввести по формуле

$$\rho(S_n, S) = \sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)|, \quad (2)$$

то сходимость по этой метрике называется равномерной на множестве  $X$ .

Пусть комплекснозначные функции  $S_n(x)$  действительного переменного  $x$  определены на интервале  $(a, b)$ , который может быть и бесконечным. Говорят, что функция  $S_n(x)$

принадлежит к классу  $L_p(a, b)$ , если  $\int_a^b |S_n(x)|^p dx < \infty$ .

В классе функций  $L_p(a, b)$  метрику можно ввести по формуле

$$\rho(S_n, S) = \left( \int_a^b |S_n(x) - S(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3)$$

Сходимость по метрике в этом случае называют сходимостью в среднем. В частности при  $p = 2$  сходимость называют средней квадратичной.

Отметим, что из равномерной сходимости следует и поточечная сходимость и сходимость в среднем. Из

поточечной сходимости не следует ни Равномерная, ни средняя.

Все выше сказанное о функциональной последовательности можно перенести на функциональный

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in X. \quad (4)$$

**Опр.2.** Функциональный ряд (4) называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм  $\{S_n(x)\}$ ,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

Сходимость может быть поточечной. Тогда множество точек  $E \subset X$ , в которых сходится ряд (4), называется его областью сходимости. Сходимость может быть равномерной, сходимостью в среднем или по любой другой метрике.

Область сходимости функционального ряда можно найти, используя известные достаточные признаки сходимости для числовых рядов.

**Пример 1.** Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ .

**Решение.** По признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{2n+2} (2n)!}{z^{2n} (2n+2)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

для любого комплексного  $z$ . Следовательно, данный ряд сходится абсолютно на всей комплексной плоскости.

**Пример 2.** Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} = S(x).$$

**Решение.** При  $x = 0$  ряд сходится к нулю,  $S(0) = 0$ . Если  $x \neq 0$ , то  $S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$  есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{1}{1+x^2}$ . Её сумму можно вычислить, как известно, по

формуле  $S(x) = \frac{u_1}{1-q} = 1+x^2$ . Таким образом

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ 1+x^2 & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$$

Заметим, что все члены данного ряда – функции непрерывные, а сумма ряда  $S(x)$  – функция разрывная.

Условие равномерной сходимости  $\sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x \in X} |r_n(x)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  можно записать иначе:

$$\sup_{x \in X} |r_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N \quad \text{или} \quad |r_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n > N \quad \text{и} \quad \forall x \in X.$$

Здесь  $r_n(x) = S_n(x) - S(x)$  – остаток ряда,  $\varepsilon > 0$  не зависит от  $x$ .

**Пример 3.** Исследовать на равномерную сходимость ряд примера 2.

**Решение.** Остаток ряда  $r_n(x) = \frac{u_{n+1}}{1-q} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$ . Очевидно,

$$\sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |r_n(x)| = 1, \text{ т.е. он не стремится к нулю при } n \rightarrow \infty, \text{ а}$$

поэтому данный ряд сходится на всей числовой оси неравномерно.

**Опр.3.** Если члены функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  удовлетворяет неравенству  $|u_n(x)| < c_n \quad \forall n \in N$  и  $\forall x \in E$ , где

$c_n > 0$  – члены сходящегося числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , то

функциональный ряд называется мажорируемым, а числовой – мажорантным.

**Теорема 1. (Вейерштрасса).** Мажорируемый в некоторой области  $E$  функциональный ряд сходится в ней абсолютно и равномерно. (Без доказательства).

**Пример 4.** Исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^4 x)}{n^2}.$$

**Решение.** Поскольку  $|u_n(x)| = \frac{|\sin(n^4 x)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \forall x \in (-\infty, +\infty)$ , а

мажорантный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  сходится (см. Упражнение § 2), то

согласно признаку Вейерштрасса данный ряд сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси.

Отметим без доказательства следующие свойства равномерной сходимости рядов.

1. Если члены  $u_n(x)$  функционального ряда (4) являются непрерывными на отрезке  $[a, b]$  функциями, а сам ряд сходится равномерно на  $[a, b]$ , то его сумма  $S(x)$  является функцией непрерывной на  $[a, b]$ .

Замечание. Если ряд сходится неравномерно, то его сумма может быть разрывной функцией (см. Пр. 2,3).

2. Равномерно сходящийся к  $S(x)$  на отрезке  $[a, b]$  ряд можно почленно интегрировать, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t) dt = \int_a^x S(t) dt, \quad a \leq x \leq b, \quad \text{полученный после}$$

интегрирования ряд сходится равномерно.

3. Пусть производные  $u'_n(x)$  членов функционального ряда (4) являются непрерывными на отрезке  $[a, b]$  функциями.

Если ряд (4) сходится на отрезке  $[a, b]$  к функции  $S(x)$ , а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  сходится на этом отрезке равномерно, то имеет место равенство  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ , т.е. ряд в этом случае можно почленно дифференцировать.

## § 5. Степенные ряды

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1)$$

где  $c_n, z, z_0$  — комплексные величины, называется степенным рядом.

**Теорема.** (Абеля). Если степенной ряд (1) сходится в некоторой точке  $z_1 \neq z_0$ , то он абсолютно сходится в любой точке  $z$ , удовлетворяющей неравенству  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ .

Если ряд (1) расходится в точке  $z_1 \neq z_0$ , то он расходится в любой точке  $z$ , удовлетворяющей неравенству  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ .

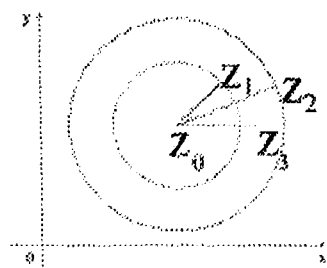
**Доказательство.** Пусть  $z = z_1$  и числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$  сходится. Тогда по необходимому признаку  $u_n = c_n (z_1 - z_0)^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, последовательность  $\{c_n (z_1 - z_0)^n\}$  является бесконечно малой, т.е.  $|c_n (z_1 - z_0)^n| < \varepsilon \quad \forall n > N_1$ . Для  $n$ -го члена ряда (1) получим

$$|u_n(z)| = |c_n(z - z_0)^n| = |c_n(z_1 - z_0)^n| \left| \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| < \varepsilon \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n. \quad (2)$$

Если  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ , то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  сходится как сумма геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < 1$ . Тогда по признаку сравнения сходится и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - z_0)^n|$ , а это означает абсолютную сходимость ряда (1). Первая часть теоремы доказана.

Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$  расходится. Докажем, что расходится и ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ ,  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ . От противного.

Пусть последний ряд сходится, тогда согласно доказанной первой части теоремы сходится числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$ , поскольку  $|z_1 - z_0| < |z - z_0|$ . Это противоречит условию теоремы. Теорема доказана.



Пусть есть точка  $z_1 \neq z_0$ , в которой ряд (1) сходится, и есть точка  $z_2$ , в которой он расходится. Тогда в круге  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  ряд (1) сходится, а вне круга  $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$  он расходится.

Можно доказать, что найдется точка  $z_3$  такая, что внутри круга  $|z - z_0| < |z_3 - z_0|$  ряд (1) сходится, а вне этого же круга ряд (1) расходится. Радиус этого круга  $R = |z_3 - z_0|$  называют радиусом сходимости ряда (1).

Если ряд (1) сходится только в одной точке  $z = z_0$ , то считают  $R = 0$ . Если ряд (1) сходится на всей комплексной плоскости, то полагают  $R = \infty$ .

Найти радиус сходимости  $R$  можно, используя признаки сходимости Коши или Даламбера. Например, по Даламберу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(z - z_0)^{n+1}}{c_n(z - z_0)^n} \right| = \frac{|z - z_0|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|}.$$

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = R$  существует, то согласно признаку

Даламбера при  $\frac{|z - z_0|}{R} < 1$  ряд сходится, а при  $\frac{|z - z_0|}{R} > 1$  ряд

расходится, отсюда ясно, что  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$  (3) есть радиус сходимости ряда (1).

Если коэффициенты  $c_n = a_n$  ряда (1) и  $z_0 = x_0$  — действительные числа, а  $z = x$  — действительное переменное, то вместо круга сходимости получим интервал сходимости  $(x_0 - R, x_0 + R)$ . На концах этого интервала степенной ряд может сходиться, а может и расходиться.

**Пример 1.** Найти радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^n}{n}.$$



**Решение.** Согласно формуле (3)  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ .

Центром интервала сходимости является точка  $x_0 = 2$ , поэтому интервалом сходимости является  $1 < x < 3$ .

Исследуем сходимость ряда на концах интервала. При  $x = 1$  получим числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{n} \right)$ , который расходится. При

$x = 3$  получим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ . По признаку Лейбница этот ряд сходится. Итак, областью сходимости данного ряда является полуинтервал  $1 < x \leq 3$ .

Пусть  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  — вещественный степенной ряд,  $a_n, x$  — действительные величины. Областью сходимости этого ряда является промежуток  $|x| < R$ . По теореме Абеля при

$0 < l < R$  числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n l^n$  сходится. Его можно

считать мажорантным для степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  на отрезке  $[-l, l]$ . Тогда согласно признаку Вейерштрасса

степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  на отрезке  $[-l, l]$  сходится

равномерно и поэтому обладает всеми свойствами равномерно сходящегося ряда. В частности, его можно почленно дифференцировать. После почленного

дифференцирования получим степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ .

Найдем его радиус сходимости. Используя (3), получим

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R. \quad \text{Как видно,}$$

дифференцирование не меняет радиуса сходимости. Отсюда ясно, что степенной ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно раз (интегрировать тоже).

Вещественный степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ , коэффициенты

которого определяются формулой  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ ,

называют рядом Тейлора для функции  $f(x)$  независимо от того, сходится ли он к функции  $f(x)$  или нет.

Если ряд Тейлора для функции  $f(x)$  сходится к этой функции, то говорят, что функция  $f(x)$  разложена в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0$ .

Не любую функцию можно разложить в ряд Тейлора, даже если она имеет производную любого порядка. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases} \quad (4)$$

имеет производные всех порядков, но в точке  $x_0 = 0$  они все обращаются в нуль. Поэтому все коэффициенты ряда Тейлора также обращаются в нуль. Сумма ряда Тейлора равна нулю и не совпадает с функцией (4). Это означает, что функцию (4) нельзя разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0 = 0$ , т. е. в ряд Маклорена.

Запишем формулу Тейлора для функции  $f(x)$  (см. § 9 гл. 3)

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + r_n(x), \quad \text{или} \quad f(x) = S_n(x) + r_n(x) \quad (5)$$

Здесь  $S_n(x)$  – частичная сумма ряда Тейлора,  $r_n(x)$  – остаточный член формулы Тейлора, он же остаток ряда Тейлора. Из (5) ясно, что  $S_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  только в том случае, если  $r_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Другими словами, в ряд Тейлора можно разложить только такую функцию, остаточный член формулы Тейлора которой стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . (Очевидно, функция (4) таким свойством не обладает). Существует и другие критерии разложимости функций в ряд Тейлора.

В § 9 гл 3 получено разложение функции  $e^x$  в ряд Маклорена

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (6)$$

который сходится к  $e^x$  на всей числовой оси. По теореме Абеля ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , где  $z = x + iy$  сходится на всей комплексной плоскости. Это дает основание определить функцию  $e^z$  от комплексного переменного следующим рядом

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (6')$$

Аналогичные определения можно дать для функций  $\sin z$  и  $\cos z$ .

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (7)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (8)$$

Ряды (7) и (8) сходятся на всей комплексной плоскости. Из упражнения § 9 гл.3 следует формула Маклорена

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + r_n(x).$$

При  $n \rightarrow \infty$  из нее получим ряд Маклорена

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k. \quad (9)$$

Можно доказать, что ряд (9) сходится к функции  $\frac{1}{1+x}$ , если  $|x| < 1$ .

**Пример 2.** Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x) = \ln(1+x)$ .

**Решение.** Т.к. степенной ряд (9) сходится равномерно, то его можно почленно проинтегрировать — радиус сходимости не изменится.

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x x^k dx,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad 0 < x \leq 1. \quad (10)$$

Степенные ряды часто используются в приближенных вычислениях, при вычислении интегралов и других случаях.

**Пример 3.** Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ .

**Решение.** Данный интеграл не берущийся. Поэтому разложим подынтегральную функцию в степенной ряд. С учетом (10) получим

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{k}. \quad (11)$$

Интегрируя ряд (11) почленно, получим

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}.$$

## ГЛАВА 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

### § 1. Функция многих переменных. Основные понятия

Рассмотрим  $n$ -мерное евклидово пространство  $R_n$  с фиксированным ортонормированным базисом. Элементы этого пространства  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  будем называть *точками*, а числа  $x_i$  — *координатами точки*. Пусть множество  $D \subset R_n$ .

**Опр.1.** Если каждой точке  $x \in D$  по определенному закону ставится в соответствие единственное число  $z \in R$ , то говорят, что на множестве  $D$  задана функция многих переменных. Пишут  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  или  $z = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Мы уже встречались с функциями двух переменных при рассмотрении поверхностей второго порядка, например, с функцией  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ . Графиком этой функции в декартовой системе координат является поверхность, которая называется гиперболическим параболоидом. Уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  определяет неявным образом функцию двух переменных. Графиком ее является сфера. В общем виде уравнение поверхности в  $R_3$  можно записать так:  $F(x, y, z) = C$ ,  $C = \text{const}$ . По аналогии уравнение  $f(x) = C$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , назовем поверхностью в  $R_n$ . Если натуральному ряду  $1, 2, \dots, k, \dots$  поставить в соответствие точки  $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$ , то получим последовательность точек.

Напомним, что расстояние в  $R_n$  определяется формулой

$$\rho(x^k, x^0) = \sqrt{(x^k - x^0, x^k - x^0)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^k - x_i^0)^2}.$$

**Опр.2.** Последовательность точек  $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$  сходится к точке  $x^0$ , если  $\rho(x^k, x^0) = \|x^k - x^0\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Пишут  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^0$  или  $x^k \rightarrow x^0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

В силу этого определения, из  $\rho(x^k, x^0) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  следует  $x_i^k \rightarrow x_i^0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , при  $k \rightarrow \infty$ , т.е. из сходимости точек следует сходимость соответствующих координат этих точек. Очевидно и обратное утверждение: если каждая координата точки  $x^k$  стремится к соответствующей координате точки  $x^0$ , то последовательность точек  $x^k$  сходится к точке  $x^0$ .

**Опр.3.** Множество точек, удовлетворяющих условию  $\rho(x^0, x) < \delta$ ,  $\delta > 0$ , называется  $\delta$ -окрестностью точки  $x^0$ . Обозначают  $O(x^0, \delta)$ .

Если у точки  $x \in D$  существует некоторая  $\delta$ -окрестность, все точки которой принадлежат  $D$ , то точка  $x$  называется *внутренней точкой множества  $D$* . Если все точки множества  $D$  внутренние, то оно называется *открытым*. Отметим, что  $\delta$ -окрестность точки  $x^0$  является открытым множеством.

Точка  $x \in R_n$  называется *граничной точкой множества  $D \subset R_n$* , если в любой ее окрестности существуют как точки, принадлежащие  $D$ , так и точки, не принадлежащие  $D$ . Совокупность всех граничных точек множества  $D$  называют ее *границей*. Обозначают  $\partial D$ . Открытое множество со своей границей называется *замкнутым*. Обозначается  $\bar{D} = D \cup \partial D$ . Очевидно,  $D \cap \partial D = \emptyset$ .

Пусть координаты точки  $x$  являются непрерывными функциями скалярного аргумента  $t$ , т.е.  $x_i = x_i(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Множество точек  $x(t)$  называется непрерывной кривой в пространстве  $R_n$ , если  $\lim_{t \rightarrow t_0} \rho(x(t), x(t_0)) = 0$ .

Частным случаем непрерывной кривой является прямая

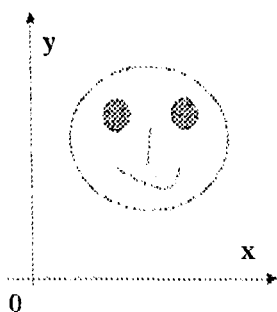
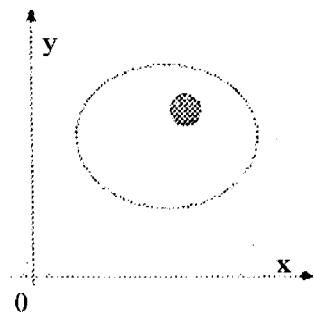
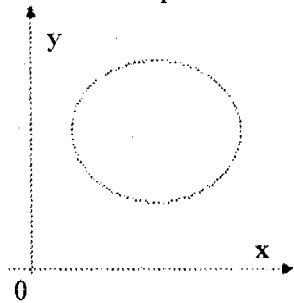
$$x_i = x_i^0 + t a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

с направляющим вектором  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , проходящая через точку  $x^0$  (см. §18, гл 1).

**Опр.4.** Множество  $D$  называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей  $D$ .

Связное открытое множество называется *областью*.

Область  $D$ , граница которой является множеством связным, называется *односвязной*. В противном случае — *многосвязной*. На рисунках показаны односвязная, двухсвязная и пятисвязная области в  $R_2$ .



## § 2. Предел, непрерывность, частные производные функции

Пусть функция  $z = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  определена в некоторой окрестности точки  $x^0$ , за исключением быть может точки  $x^0$ .

**Опр.1. (Гейне).** Число  $b$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x^0$ , если для любой последовательности точек  $x^k$  из окрестности этой точки, сходящейся к  $x^0$ , соответствующая числовая последовательность значений функции  $f(x^k)$  сходится к  $b$ .

Можно дать другое эквивалентное определение предела.

**Опр.2. (Коши).** Число  $b$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $x^0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что из условия  $0 < \rho(x, x^0) < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ . Пишут  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = b$ .

Основные свойства предела функции одной переменной переносятся на функцию  $n$  переменных.

Замечание. Пусть через точку  $x^0$  проходит некоторая прямая с направляющим вектором  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Если последовательность значений аргумента  $x^k$  лежит на этой прямой, то говорят о пределе функции в точке  $x^0$  по направлению вектора  $a$ . Если последовательность  $x^k$  выбирается на некоторой кривой, проходящей через точку  $x^0$ , то предел называется пределом функции в точке  $x^0$  по данной кривой.

Если предел функции в точке  $x^0$  существует, то существуют и пределы по направлению вектора  $a$  и по кривой, а в силу единственности предела все эти пределы совпадают. Однако, если предел функции в точке  $x^0$  не



существует, то предел по направлению или предел по кривой может существовать.

**Пример 1.** Найти предел функции  $z = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2}$  в начале координат.

**Решение.** Поскольку,  $0 \leq \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \leq x^2$ , а  $x^2 \rightarrow 0$  при

$$x \rightarrow 0, \text{ то } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} = 0.$$

**Пример 2.** Найти предел функции  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  в начале координат.

**Решение.** Найдем предел функции по любой прямой  $y = kx$ ,  $k \neq 0$ .  $f(x, kx) = \frac{kx}{x^2 + k^2} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Найдем теперь предел этой функции по параболе  $y = x^2$ .

$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$  Следовательно, предела данная функция в точке  $(0, 0)$  не имеет.

**Опр.3.** Если  $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = f(x^0)$ , то функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке  $x^0$* .

Функция непрерывная в каждой точке области  $D$  называется *непрерывной в области  $D$* .

Пусть  $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  – приращение аргумента  $x$ ,  $\Delta z = f(x^0 + \Delta x) - f(x^0)$  – приращение функции в точке  $x^0$ . Тогда условия непрерывности функции в точке  $x^0$  можно записать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x^0} (f(x) - f(x^0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta z = 0,$$

т.е. если функция непрерывная, то бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Справедливо и обратное утверждение.

Свойства функции  $n$  переменных непрерывной в замкнутой области  $\bar{D}$ , аналогичны свойствам функции одной переменной непрерывной на отрезке.

Рассмотрим функцию двух переменных  $z = f(x, y)$ , определенную в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ .

Зафиксируем вторую переменную, т.е. положим  $y = y_0$ . Тогда получим функцию одной переменной  $x$ :

$$z = f(x, y_0).$$

Обычная производная этой функции в точке  $x = x_0$  называется частной производной функции двух переменных  $f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  по  $x$  и обозначается так:

$$\text{так: } \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0).$$

$$\text{Таким образом } \left. \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

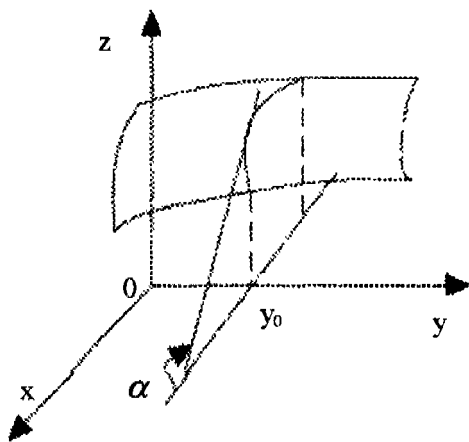
По определению обычной производной имеем

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}.$$

Здесь  $\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$  — частное приращение функции в точке  $(x_0, y_0)$ . Аналогично определяется частная производная в точке  $(x_0, y_0)$  по  $y$ :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}.$$

Геометрически функция  $z = f(x, y)$  представляет собой поверхность в системе координат  $(x, y, z)$ , а функция  $z = f(x, y_0)$  является линией пересечения этой поверхности с



плоскостью  $y = y_0$ . Поэтому частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$ ,

где  $\alpha$  — угол между касательной к кривой сечения и осью  $x$ .

Аналогично  $\frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$ ,

где  $\beta$  — угол между касательной к кривой

сечения плоскостью  $x = x_0$  и осью  $y$ .

Определение частной производной распространяется на функцию  $z = f(x)$   $n$  переменных:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\Delta_i f(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) -$$

$- f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Вторая частная производная по той же переменной называется частной производной

второго порядка. Обозначают ее  $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right)$ .

Вторая частная производная по другой переменной называется смешанной частной производной второго порядка. Обозначают ее

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial y_i} = f''_{x_j y_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right).$$

В общем случае частная производная от  $(n-1)$ -ой частной производной называется частной производной  $n$ -го порядка.

**Пример.** Найти все частные производные второго порядка от функции  $z = \cos(x^2 + 2y)$ .

**Решение.** Запишем сначала частные производные по  $x$  и по  $y$ .

$$z'_x = -2x \sin(x^2 + 2y), \quad z'_y = -2 \sin(x^2 + 2y).$$

Найдем теперь частные производные второго порядка.

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = -2 \sin(x^2 + 2y) - 4x^2 \cos(x^2 + 2y),$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = -4 \cos(x^2 + 2y),$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = -4x \cos(x^2 + 2y),$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = -4x \cos(x^2 + 2y).$$

Обратим внимание, что в данном примере  $z''_{xy} = z''_{yx}$ . В общем случае это не всегда так.

**Теорема.** Если частные производные  $f''_{xy}$ ,  $f''_{yx}$  функции  $z = f(x, y)$  непрерывны в точке  $(x_0, y_0)$ , то они равны между собой в этой точке. (без доказательства).

### **§ 3. Дифференцируемые функции, дифференциалы высших порядков**

Рассмотрим сначала функцию двух переменных  $z = f(x, y)$ . Пусть она определена в некоторой  $\delta$ -окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и пусть точка  $(x, y)$  принадлежит этой окрестности. Приращение функции

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$  называют полным приращением функции в точке  $(x_0, y_0)$  в отличие от частных приращений  $\Delta_x z$  и  $\Delta_y z$ .

**Опр.1.** Функция  $z = f(x, y)$  называется дифференцируемой в точке  $(x_0, y_0)$ , если существуют два числа  $A$  и  $B$  такие, что полное приращение функции представимо в виде:

$$\Delta z = A \Delta x + B \Delta y + o(\rho), \quad (1)$$

где  $o(\rho)$  – бесконечно малая более высокого порядка, чем

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

**Опр.2.** Главная линейная относительно  $\Delta x$  и  $\Delta y$  часть полного приращения функции в точке  $(x_0, y_0)$  называется полным дифференциалом функции в этой точке. Обозначают  $dz = A \Delta x + B \Delta y$  или  $dz = A dx + B dy$ .

**Теорема 1.** Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные.

**Доказательство.** Из (1) следует, что при  $\rho \rightarrow 0$  (следовательно,  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ )  $\Delta z \rightarrow 0$ , а это означает, что функция непрерывна в точке  $(x_0, y_0)$ .

Положим  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta x \neq 0$ , тогда из (1) найдем

$$\Delta z = \Delta_x z = A \Delta x + o(\Delta x).$$

Разделив обе части равенства на  $\Delta x$  и переходя к пределу

$$\text{получим } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = A,$$

т.е. частная производная по  $x$  существует. Аналогично

найдем  $\frac{\partial z}{\partial y} = B$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Разрывная функция не является дифференцируемой. Доказательство от противного.

Отметим, что даже функция непрерывная в точке  $x^0$  может быть в ней не дифференцируемой.

Таким образом, если полный дифференциал существует, то его можно записать так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_x z + d_y z,$$

где  $d_x z = z'_x dx$ ,  $d_y z = z'_y dy$  – частные дифференциалы.

Обратная теорема не справедлива, т.е. функция может иметь частные производные в некоторой точке и не быть в ней дифференцируемой. Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } xy \neq 0, \\ 0, & \text{если } xy = 0 \end{cases}$$

имеет частные производные в точке  $(0, 0)$

$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$ , но приращение функции в этой точке  $\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = 1 - 0 = 1$  при любых  $\Delta x \neq 0$  и  $\Delta y \neq 0$ , т.е. предел приращения функции в этом случае не равен нулю. Следовательно, функция разрывна в точке  $(0, 0)$  и не может быть, согласно следствию, дифференцируемой.

Дифференциал функции  $n$  переменных  $z = f(x)$  имеет вид:

$$dz = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (2)$$

При этом полное приращение функции  $\Delta z$  отличается от дифференциала на бесконечно малую высшего порядка по

сравнению с  $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}$ , т.е.

$$\Delta z = dz + o(\rho). \quad (3)$$

**Теорема 2.** Если функция  $z = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет в точке  $x^0$  непрерывные частные производные, то она дифференцируема в этой точке (без доказательства).

Функция, имеющая непрерывные частные производные в области  $D$ , называется непрерывно дифференцируемой в этой области.

Найдем второй дифференциал функции  $z = f(x)$ , считая вторые частные производные непрерывными, а дифференциалы  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  постоянными величинами.

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i. \end{aligned}$$

Итак, 
$$d^2 z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i. \quad (4)$$

Замечание. Поскольку  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ , то второй

дифференциал является квадратичной формой  $n$ -го порядка относительно  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ . (см. § 9 гл. 1).

Аналогично можно получить формулы для дифференциалов третьего и последующих порядков. Например,

$$d^3 z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j dx_k. \quad (5)$$

В частном случае функции двух переменных  $z = f(x, y)$  формулы (4) и (5) примут вид:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2, \quad (4')$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3. \quad (5')$$

Эти формулы удобнее записать в символической (операторной) форме:

$$d^2 z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 f(x, y),$$

$$d^3 z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 f(x, y).$$

Аналогично можно записать

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y). \quad (6)$$

Обобщая формулу (6) на функцию  $n$  переменных, получим

$$d^n z = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right)^n f(x). \quad (7)$$

#### § 4. Производные сложной и неявно заданной функций

**Теорема 1.** Пусть функция  $z = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $(x, y)$ , а функции  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  дифференцируемы в точке  $t$ . Тогда производная по  $t$



сложной функции  $z = f(x(t), y(t))$  существует и вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = f'_x x'_t + f'_y y'_t \quad (1)$$

**Доказательство.** Дадим приращение  $\Delta t$  аргументу  $t$ . Тогда функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $f(x, y)$  получают приращения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . В силу дифференцируемости функции  $f(x, y)$  ее приращение можно представить в виде

$$\Delta z = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + o(\rho), \quad (2)$$

где  $o(\rho) = \varepsilon(\rho) \cdot \rho$ ,  $\varepsilon(\rho) \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ ,  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ .

Так как функции  $x(t)$  и  $y(t)$  дифференцируемы, то и непрерывны, поэтому при  $\Delta t \rightarrow 0$   $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  и  $\rho \rightarrow 0$ .

Разделим (2) на  $\Delta t$  и перейдем к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\rho) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Поскольку предел правой части последней формулы существует, то существует и предел левой части

$$\frac{dz}{dt} = f'_x x'_t + f'_y y'_t. \text{ Теорема доказана.}$$

Теорема легко обобщается на сложную функцию  $k$  переменных  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Пусть  $z = f(x)$ ,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а  $x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (3)$$

если функция  $z = f(x)$  дифференцируема, а функции  $x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$  имеют непрерывные частные производные.

**Пример 1.** Показать, что функция  $z = f(u, v)$ ,  $u = x + a t$ ,  $v = y + b t$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (4)$$

**Решение.** Найдем частные производные сложной функции

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f'_u \cdot u'_t + f'_v \cdot v'_t = a f'_u + b f'_v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = f'_v.$$

Подставляя найденные производные в уравнение (4), убедимся, что оно превращается в тождество. Задача решена.

С неявно заданной функцией одной переменной мы уже встречались (см. § 3, гл.3). Рассмотрим теперь неявно заданную функцию  $n$  переменных.

**Теорема 2.** Пусть функция  $F(x, y)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  определена в окрестности точки  $(x^0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0)$  пространства  $R_{n+1}$ . Если функция  $F(x, y)$  вместе со своими частными производными  $F'_y, F'_{x_i}$  непрерывна в окрестности этой точки, причем  $F(x^0, y_0) = 0$ , а  $F'_y(x^0, y_0) \neq 0$ , то уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет функцию  $n$  переменных  $y = y(x)$ , имеющую частные производные, определяемые формулой

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

(без доказательства).

**Пример 2.**  $2x^3y - y^3x = a^4$ . Найти  $y'_x$ .

**Решение.** Функция  $F(x, y) = 2x^3y - y^3x - a^4$  удовлетворяет теореме 2, т.к.  $F'_x = 6x^2y - y^3$ ,  $F'_y = 2x^3 - 3xy^2$  существуют и непрерывны на всей плоскости  $xOy$ , а уравнение

$$F(x, y) = 2x^3y - y^3x - a^4 = 0 \text{ имеет решение, например, } x = y = a.$$

Следовательно, это уравнение в окрестности точки  $(a, a)$  определяет непрерывную функцию одного переменного  $y = y(x)$ , заданную неявно. Производную неявной функции найдем по формуле (5)

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{6x^2y - y^3}{2x^3y - 3xy^2} \Bigg|_{\substack{x=a \\ y=a}} = 5.$$

**Пример 3.**  $z^3 + 3xyz = a^3$ . Найти  $z'_x$  и  $z'_y$ .

**Решение.** Аналогично можно убедиться, что уравнение  $F(x, y, z) = z^3 + 3xyz - a^3 = 0$  определяет неявную функцию двух переменных  $z = z(x, y)$  в окрестности точки  $(0, 0, a)$ .

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz}{z^2 + xy}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xy}{z^2 + xy}.$$

Замечание. Частные производные порядка выше первого от неявно заданной функции можно найти последовательным дифференцированием формулы (5).

**Упражнение.** Найти вторую производную неявной функции примера 2 в точке  $(a, a)$ .

## § 5. Производная по направлению, градиент

В § 2 было введено понятие предела функции в направлении вектора  $\vec{a}$ . Введем теперь понятие производной функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  в направлении единичного вектора  $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ . Проведем через точку  $M_0$  прямую с направляющим вектором  $\vec{n}$ . Ее уравнения

$$x = x_0 + t \cos\alpha, \quad y = y_0 + t \cos\beta, \quad z = z_0 + t \cos\gamma$$

или  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{n}$ . (1)

Пусть точка  $M(x, y, z)$  лежит на прямой (1).

$$\begin{aligned} \text{Предел отношения } \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\pm |M_0M|} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos\alpha, y_0 + t \cos\beta, z_0 + t \cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}, \end{aligned} \quad (2)$$

если он существует, называется производной функции  $f(x, y, z)$  в точке  $M_0$  в направлении вектора  $\vec{n}$ .

Обозначают  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ . В формуле (2)  $\pm |M_0M| = \pm |\vec{r} - \vec{r}_0| = t$ ,

причем  $t > 0$ , если векторы  $\vec{n}$  и  $\overline{MM_0}$  сонаправлены и  $t < 0$  в противном случае.

Как видно из (2) производная по направлению  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$  есть

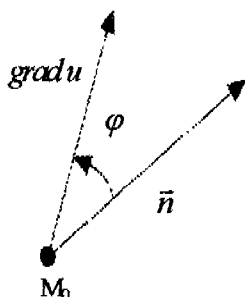
производная сложной функции по параметру  $t$ , т.е.  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} =$

$= \frac{df}{dt}$ . Предполагая, что условия обобщенной теоремы 1 § 4

выполняются, воспользуемся формулой (3) § 4. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} &= f'_x x'_i + f'_y y'_i + f'_z z'_i = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma. \end{aligned} \quad (3)$$

Формула (3) и определяет производную по направлению.



Введем вектор  $\text{grad } f =$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \text{ называемый гра-}$$

диентом функции  $u = f(x, y, z)$ .

Тогда из (3) получим

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = (\text{grad } u, \vec{n}) = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi, \quad (4)$$

где  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{n}$  и

$\text{grad } u$ .

Производная по направлению  $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$  характеризует скорость

изменения функции  $f(x, y, z)$  в направлении вектора  $\vec{n}$ . Из

(4) видно, что эта скорость в точке  $M_0$  максимальна при  $\varphi = 0$ , т.е. в направлении, совпадающем с направлением вектора  $\text{grad } u$ . Таким образом  $\text{grad } u$  в точке  $M_0$  определяет направление и величину наибольшего возрастания функции  $u = f(x, y, z)$ .

Понятие градиента можно обобщить на функцию  $n$  переменных  $z = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  — орты базиса в  $R_n$ , то

$$\text{grad } z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i. \quad (5)$$

Вектор  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  называется перпендикулярным поверхности  $f(x, y, z) = C$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , если он ортогонален касательной к любой кривой, проходящей через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и лежащей на поверхности

$f(x, y, z) = C$ . Пусть

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (6)$$

произвольная кривая, проходящая через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и лежащая на поверхности  $f(x, y, z) = C$ . Тогда  $f(x(t), y(t), z(t)) \equiv C$ . Докажем, что  $\text{grad } f$  перпендикулярен поверхности  $f(x, y, z) = C$  (она называется поверхностью уровня функции  $f(x, y, z)$ ) в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Действительно, вектор  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  направлен по касательной к кривой (6) (см. §4, гл.3).

Найдем скалярное произведение  $(\text{grad } u, \vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = \frac{df}{dt} = \frac{dC}{dt} = 0$  Это и означает, что

градиент перпендикулярен поверхности уровня  $f(x, y, z) = C$ .

Утверждение это справедливо и для поверхности уровня в  $R_n$ .

Если некоторая плоскость проходит через точку  $(x_0, y_0, z_0)$ , лежащую на поверхности  $f(x, y, z) = C$ , а вектором нормали плоскости служит  $\text{grad } f$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , то эту плоскость называют касательной плоскостью к

поверхности  $f(x, y, z) = C$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ . Уравнение касательной плоскости, очевидно, следующее

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + D(z - z_0) = 0, \quad (7)$$

где  $A = f'_x(x_0, y_0, z_0)$ ,  $B = f'_y(x_0, y_0, z_0)$ ,

$D = f'_z(x_0, y_0, z_0)$ .

Уравнение нормали к поверхности  $f(x, y, z) = C$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  имеет вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}. \quad (8)$$

**Пример.** Найти вектор нормали к поверхности уровня

функции  $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$  в точке  $M_0(a, b, c)$ ,

направленный в сторону возрастания функции.

**Решение.** При  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = c$   $u = 3$ , следовательно,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3$  есть поверхность уровня, проходящая через точку  $M_0$ . Поскольку  $\text{grad } u$  перпендикулярен

поверхности уровня и направлен в сторону возрастания

функции, то  $\text{grad } u(M_0) = 2\left(\frac{1}{a}\vec{i} + \frac{1}{b}\vec{j} + \frac{1}{c}\vec{k}\right)$  — искомый

вектор.

## § 6. Формула Тейлора

Пусть функция  $f(x, y)$  непрерывная вместе со всеми частными производными до  $(n+1)$ -го порядка включительно в окрестности некоторой точки  $(x_0, y_0)$ . Пусть точка  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$  принадлежит этой

окрестности. Считая  $x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$  постоянными, мы можем выражение  $f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$  рассматривать как функцию переменной  $t$ , т.е.

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

$$\text{Обозначим } x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y, \quad (2)$$

тогда  $\varphi(t) = f(x, y)$  – сложная функция аргумента  $t$ .

Запишем для функции  $\varphi(t)$  формулу Тейлора (Маклорена)

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \varphi(0) + \varphi'_t(0) \cdot t + \frac{1}{2!} \varphi''_{t^2}(0) \cdot t^2 + \dots + \\ & + \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}_{t^n}(0) \cdot t^n + R_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0), \quad \varphi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y). \quad (4)$$

Выразим теперь и производные функции  $\varphi$  в формуле (3) через производные функции  $f$ . По теореме о дифференцировании сложной функции найдем

$$\begin{aligned} \varphi'_t(0) &= \frac{\partial f}{\partial x} x'_t + \frac{\partial f}{\partial y} y'_t \Big|_{t=0} = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y \Big|_{t=0} = \\ &= df(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \varphi''_{t^2}(0) &= (f'_x \Delta x + f'_y \Delta y)'_x \cdot x'_t \Big|_{t=0} + (f'_x \Delta x + f'_y \Delta y)'_y \cdot y'_t \Big|_{t=0} = \\ &= (f''_{x^2} \Delta x + f''_{xy} \Delta y) \Delta x \Big|_{t=0} + (f''_{xy} \Delta x + f''_{y^2} \Delta y) \Delta y \Big|_{t=0} = \\ &= (f''_{x^2} \Delta x^2 + 2f''_{xy} \Delta x \Delta y + f''_{y^2} \Delta y^2) \Big|_{t=0} = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^2 f(x_0, y_0) = d^2 f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

По индукции запишем



$$\varphi_{t^k}^{(k)}(0) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^k f(x_0, y_0) = d^k f(x_0, y_0). \quad (5)$$

Положим в (3)  $t = 1$  и перепишем эту формулу в виде

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \varphi_{t^k}^{(k)}(0) + R_n. \quad (6)$$

Подставляя в (6) выражения (4) и (5), получим формулу Тейлора для функции  $f(x, y)$ .

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + R_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Для функции  $n$  переменных  $z = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  форма записи формулы Тейлора не изменится

$$f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(x^0) + R_n. \quad (8)$$

Дифференциал  $k$ -го порядка определяется по формуле (7) § 3.

**Пример.** Разложить по формуле Маклорена до членов третьего порядка функцию  $z = e^x \cos y$ .

**Решение.** Заметим, что  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $dx = \Delta x = x - x_0 = x$ ,  $dy = \Delta y = y$ . Вычислим значение функции и ее дифференциалы в точке  $(0, 0)$ . Воспользуемся формулой (6) § 3.

$$z(0, 0) = 1, \quad dz(0, 0) = e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy \Big|_{(0,0)} = x,$$

$$\begin{aligned} d^2 z(0, 0) &= e^x \cos y \, dx^2 + 2e^x (-\sin y) \, dx \, dy - e^x \cos y \, dy^2 \Big|_{(0,0)} = \\ &= x^2 - y^2, \end{aligned}$$

$$d^3z(0,0) = e^x \cos y dx^3 - 3e^x \sin y dx^2 dy + \\ + 3e^x(-\cos y) dx dy^2 + e^x \sin y dy^3 \Big|_{(0,0)} = \\ = x^3 - 3xy^2.$$

По формуле (6) с учетом найденных выражений, получим

$$e^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \frac{1}{6}(x^3 - 3xy^2) + R_3.$$

## § 7. Экстремум функции

Квадратичная форма  $n$ -го порядка

$$A(h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (1)$$

называется положительно определенной, если  $A(h) > 0$  для любого ненулевого вектора  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ . Если  $A(h) < 0 \quad \forall h \neq 0$ , то квадратичную форму называют отрицательно определенной. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются знакопостоянными или определенными. Если квадратичная форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется знакопеременной или неопределенной.

Например, квадратичная форма  $A(h) = h_1^2 + 3h_2^2$  — положительно определенная,  $A(h) = -h_1^2 - 3h_2^2$  — отрицательно определенная, а квадратичная форма  $A(h) = h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2 = (h_1 - h_2)^2$  называется не строго положительно определенной, т.к. обращается в нуль при  $h_1 = h_2 \neq 0$ .

Выпишем матрицу квадратичной формы (1) и ее главные миноры.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$A_n = \det A.$$

**Теорема. (Критерий Сильвестра).** 1. Если главные миноры матрицы квадратичной формы положительные, т.е.  $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0$ , то квадратичная форма положительно определенная.

2. Если  $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots, (-1)^n A_n > 0$ , то квадратичная форма отрицательно определенная.

3. Если  $A_1 \geq 0, A_2 \geq 0, \dots, A_n \geq 0$  или  $A_1 \leq 0, A_2 \geq 0, \dots, (-1)^n A_n \geq 0$  и существует  $A_i = 0$ , то квадратичная форма не строго определенная.

4. Во всех остальных случаях квадратичная форма не определенная (без доказательства).

**Опр.** Точка  $x^0$  называется точкой локального максимума функции  $z = f(x)$ , если существует некоторая окрестность  $O(x^0, \delta)$  такая, что  $f(x^0) \geq f(x) \forall x \in O(x^0, \delta)$  или  $f(x) - f(x^0) = \Delta f \leq 0 \forall x \in O(x^0, \delta)$ . Если  $\Delta f \geq 0 \forall x \in O(x^0, \delta)$ , то точка  $x^0$  называется точкой локального минимума.

Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума. Если неравенства строгие ( $\Delta f > 0, \Delta f < 0$ ), то экстремум называется строгим.

**Теорема. (Необходимые условия экстремума).** Пусть точка  $x^0$  является точкой локального экстремума функции  $z = f(x)$ . Тогда, если существуют частные производные в точке  $x^0$ , то они обращаются в нуль в этой точке, т.е.

$$f'_i(x^0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

**Доказательство.** Зафиксируем все переменные, исключая одну, например,  $x_1$ , т.е.  $x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0, \dots, x_n = x_n^0$ . Тогда  $f(x) = f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$  будет функцией одной переменной  $x_1$ . Поскольку эта функция в точке  $x_1^0$  имеет локальный экстремум, то ее производная, как известно, обращается в нуль. Но эта производная является частной производной функции  $f(x)$  по переменной  $x_1$ , т.е.

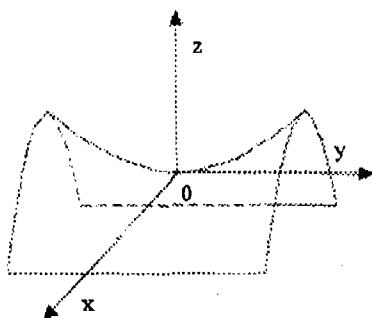
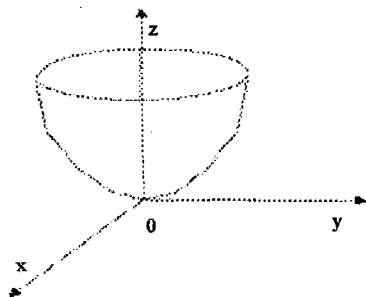
$f'_{x_1}(x^0) = 0$ . Аналогично можно получить остальные равенства (2). Теорема доказана.

**Следствие.** Если функция  $z = f(x)$  дифференцируема и имеет в точке  $x^0$  экстремум, то  $df(x^0) = 0$  и  $grad f(x^0) = 0$ . Доказательство очевидно.

Решения системы уравнений (2) называются стационарными точками функции.

**Пример 1.** Рассмотрим две функции  $f_1(x, y) = x^2 + y^2$  (параболоид вращения) и

$f_2(x, y) = -x^2 + y^2$  (гиперболический параболоид).



Очевидно,  $\Delta f_1(0,0) = f_1(x,y) - f_1(0,0) = x^2 + y^2 \geq 0$ .

Согласно определению функция  $f_1(x,y)$  достигает в точке  $(0,0)$  минимума. Полное приращение второй функции в

точке  $(0,0)$   $\Delta f_2(0,0) = -x^2 + y^2$ . При  $x = 0$   $\Delta f_2(0,0) \geq 0$ , при  $y = 0$   $\Delta f_2(0,0) < 0$ . Очевидно, что вторая функция в начале координат экстремума не имеет.

Легко проверить, что  $\text{grad } f_1(0,0) = 0$  и  $\text{grad } f_2(0,0) = 0$ .

Этот пример показывает, что условие  $\text{grad } f(x^0) = 0$  является только необходимым для существования экстремума в точке  $x^0$ , оно не является достаточным.

Рассмотрим теперь достаточные признаки существования строгого экстремума. Пусть функция  $z = f(x)$  имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в стационарной точке  $x^0$ .

Запишем формулу Тейлора в  $O(x^0, \delta)$  при  $n = 1$ .

$$f(x^0 + \Delta x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0 + \theta \Delta x) \text{ или}$$

$$\Delta f(x^0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^0 + \theta \Delta x)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j, \quad (3)$$

где  $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ .

Поскольку частные производные непрерывные, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f(x^0 + \theta \Delta x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f(x^0 + \theta \Delta x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} + \alpha_{ij}(\Delta x),$$

где  $\alpha_{ij}(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Учитывая это, равенство (3) перепишем так:

$$\begin{aligned} \Delta f(x^0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(\Delta x) \Delta x_i \Delta x_j = \\ &= \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Если  $d^2 f(x^0) \neq 0$ , то второе слагаемое в (4) является бесконечно малой высшего порядка малости по сравнению с первым. Поэтому в достаточно малой окрестности точки  $x^0$  знак полного приращения  $\Delta f(x^0)$  функции будет определяться знаком второго дифференциала  $d^2 f(x^0)$ .

Итак, из определения строгого экстремума и равенства (4) следует:

- 1) если  $d^2 f(x^0) > 0, \forall x \in O(x^0, \delta)$ , то стационарная точка  $x^0$  является точкой строгого минимума для функции  $z = f(x)$ ;
- 2) если  $d^2 f(x^0) < 0, \forall x \in O(x^0, \delta)$ , то в точке  $x^0$  достигается строгий максимум;
- 3) если знак второго дифференциала  $d^2 f(x^0)$  меняется в  $O(x^0, \delta)$ , то точка  $x^0$  не является точкой экстремума функции  $z = f(x)$ .

Отметим еще раз, что второй дифференциал функции  $z = f(x)$  является квадратичной формой от  $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ , т.е.

$$d^2 f(x^0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j, \quad (5)$$

где  $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j}$ . Поэтому достаточные условия строгого

экстремума 1 – 3 можно перефразировать следующим образом:

- 1) если квадратичная форма (5) положительно определена в  $O(x^0, \delta)$ , то точка  $x^0$  является точкой строгого минимума;
- 2) если квадратичная форма (5) отрицательно определена в  $O(x^0, \delta)$ , то точка  $x^0$  является точкой строгого максимума;

3) если квадратичная форма (5) неопределена в  $O(x^0, \delta)$ , то точка  $x^0$  не является точкой экстремума функции  $z = f(x)$ .

**Пример 2.** Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z.$$

**Решение.** Найдем частные производные первого и второго порядков.

$$u'_x = 2x - 4, \quad u''_{xx} = a_{11} = 2, \quad u''_{yy} = a_{22} = 2,$$

$$u'_y = 2y + 6, \quad u''_{xy} = a_{12} = 0, \quad u''_{yz} = a_{23} = 0,$$

$$u'_z = 2z - 2, \quad u''_{xz} = a_{13} = 0, \quad u''_{zz} = a_{33} = 2.$$

Приравнявая первые частные производные к нулю, найдем стационарную точку  $x^0 = (2, -3, 1)$ . Запишем матрицу квадратичной формы и найдем ее главные миноры в точке  $x^0 = (2, -3, 1)$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = 2, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_3 = \det A = 8.$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена, следовательно данная функция в точке  $x^0 = (2, -3, 1)$  достигает минимума.

Остановимся подробнее на частном случае функции двух переменных  $z = f(x, y)$ . Квадратичная форма в этом случае следующая:

$$A(x, y) = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2,$$

$$A = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}, \quad A_1 = f''_{xx}, \quad A_2 = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2.$$

Достаточные условия существования экстремума в стационарной точке будут выглядеть так:

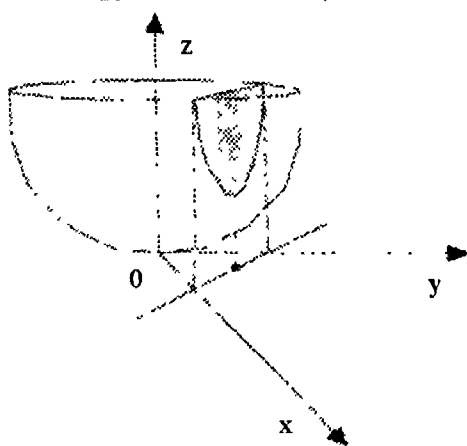
- 1) если  $f''_{xx} > 0$ ,  $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$ , то функция достигает минимума,
- 2) если  $f''_{xx} < 0$ ,  $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$ , то функция достигает максимума,
- 3) если  $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 < 0$ , то экстремума нет.

Замечание. Случай, когда  $f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$ , т.е. когда второй дифференциал обращается в нуль, требует дополнительного исследования

## § 8. Условный экстремум функции

В математике и ее приложениях часто встречается задача об отыскании экстремума функции, аргументы которой удовлетворяют дополнительным условиям (связям). Такого рода экстремумы называются условными.

Рассмотрим, например, функцию  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  и уравнения связи  $x + y - 1 = 0$ . Найдем условный экстремум этой функции, т.е. будем искать экстремум не на всей



плоскости, где определена функция  $f(x, y)$ , а только на линии  $x + y - 1 = 0$  в этой плоскости.

Геометрически функция  $z = x^2 + y^2$  определяет собой параболоид, а уравнение связи  $x + y - 1 = 0$  — плоскость. Следовательно, нам надо



исследовать на экстремум линию их пересечения.

Из уравнения связи найдем  $y = 1 - x$ , подставляя его в

данную функцию, получим  $z = f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1$ .

Таким образом, при наличии связи функция  $f(x, y)$

становится функцией одного переменного  $x$ , а задача

условного экстремума для функции двух переменных

сводится к задаче безусловного экстремума функции

одного переменного  $z = 2x^2 - 2x + 1$ . Решая ее, найдем, что

условный экстремум (минимум) достигается в точке

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Заметим, что безусловный экстремум функции  $z =$

$= x^2 + y^2$  находится в начале координат.

Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума

функции  $z = f(x, y)$  в общем виде. Функция  $z = f(x, y)$

геометрически представляет собой некоторую

поверхность, а уравнение связи  $\varphi(x, y) = 0$  — некоторый

цилиндр. Нам нужно исследовать на экстремум линию

пересечения двух поверхностей:

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

В точке экстремума  $\text{grad } f$  должен быть

перпендикулярным цилиндру  $\varphi(x, y) = 0$ , в противном

случае на линии пересечения не будет выполняться

необходимое условие экстремума. С другой стороны

$\text{grad } \varphi$  перпендикулярен поверхности уровня  $\varphi(x, y) = 0$

(см. § 5), следовательно  $\text{grad } f$  и  $\text{grad } \varphi$  в точке

экстремума коллинеарны, поэтому линейно зависимые

$\text{grad } \varphi + \lambda \text{grad } f = 0$ , или  $\text{grad}(f + \lambda \varphi) = 0$ . Записывая

последнее равенство в скалярном виде и присоединяя

уравнения связи, получим необходимые условия существования условного экстремума

$$\begin{cases} f'_x + \lambda \varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda \varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Если ввести функцию Лагранжа

$$L(\lambda, x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y),$$

то легко проверить, что необходимые условия безусловного экстремума функции Лагранжа совпадают с (1). Чтобы найти достаточные условия экстремума, следует определить знак полного приращения  $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$  функции  $z = f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  возможного экстремума. Но при наличии связи  $\varphi(x, y) = 0$   $\Delta z = \Delta L$ , где  $\Delta L$  – полное приращение функции Лагранжа. Поэтому достаточные условия безусловного экстремума для функции Лагранжа будут достаточными для условного экстремума функции  $f(x, y)$ .

Исследуем знак второго дифференциала

$$\begin{aligned} d^2 L &= L''_{xx} dx^2 + 2 L''_{xy} dx dy + L''_{yy} dy^2 = \\ &= dx^2 \left( L''_{xx} + 2 L''_{xy} y'_x + L''_{yy} (y'_x)^2 \right). \end{aligned}$$

Производную  $y'_x = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$  найдем из уравнения связи

$\varphi(x, y) = 0$ . Учитывая это,  $d^2 L$  преобразуем следующим образом:

$$d^2 L = \frac{dx^2}{(\varphi'_y)^2} \cdot \Delta, \quad (2)$$

$$\text{где } \Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Из (2) видно, что при  $\Delta > 0$ ,  $d^2L > 0$  и функция  $z = f(x, y)$  достигает в точке  $(x_0, y_0)$  условного минимума, а при  $\Delta < 0$  — максимума.

В нашем примере  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\varphi(x, y) = x + y - 1$ ,  $L(\lambda, x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$ . Запишем систему (1)

$$\begin{cases} L'_x = 2x + \lambda = 0, \\ L'_y = 2y + \lambda = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является  $(x_0, y_0, \lambda_0) = (0,5; 0,5; -1)$ . Это точка возможного условного экстремума.

Вычислим определитель  $\Delta$  в точке  $(0,5; 0,5; -1)$ :

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0. \text{ Вывод: в точке } (0,5; 0,5) \text{ функция}$$

$z = x^2 + y^2$  достигает условного минимума.

Необходимые условия (1) легко обобщаются на функцию  $n$  переменных  $z = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  с  $m < n$  связями  $\varphi_i(x) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . В этом случае  $\text{grad } f$  в точке возможного экстремума коллинеарен каждому из  $\text{grad } \varphi_i$ , следовательно, все эти векторы линейно зависимы, т. е.

$$\text{grad } f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{grad } \varphi_i = 0 \text{ или } \text{grad} \left( f + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Присоединяя к (4) уравнения связи  $\varphi_i(x) = 0$ , получим необходимые условия условного экстремума.

Функция Лагранжа в этом случае имеет вид.

$$L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x). \quad (5)$$

Достаточные условия можно получить, определив знак  $d^2L$  в точке возможного условного экстремума.

# ГЛАВА 7. Линейная алгебра

## § 1. Понятие линейного оператора

**Опр.1.** Правило, по которому каждому элементу  $x$  некоторого непустого множества  $X$  ставится в соответствие единственный элемент  $y$  множества  $Y$ , называется *оператором*. Символически это записывается так:

$$y = \tilde{A} x.$$

Говорят, что оператор действует из  $X$  в  $Y$ , или отображает  $X$  в  $Y$ . Множество  $X$  называют *областью определения оператора*, а множество  $Y$  – *областью значений оператора*. Элемент  $y \in Y$  называют *образом элемента*  $x \in X$ , а сам элемент  $x$  – *прообразом элемента*  $y$ . Совокупность всех образов называют *образом оператора*  $\tilde{A}$  и обозначают  $\text{im } \tilde{A}$ .

Из определения видно, что понятие оператора – это обобщение понятия функции. Если области определения и значения оператора являются числовыми множествами, то оператор является функцией. Если областью определения оператора является множество функций, а областью значений является числовое множество, то оператор называют *функционалом*.

**Опр.2.** Если множества  $X$  и  $Y$  – линейные пространства и имеет место равенство  $\tilde{A}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha \tilde{A}x_1 + \beta \tilde{A}x_2$ , (1)  
 $\forall x_1, x_2 \in X$  и любых чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , то оператор  $\tilde{A}$  называют *линейным*.

Приведем примеры линейных операторов.

1. Пусть  $M_{n+1}$  – линейное пространство многочленов степени не выше  $n$   $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  и пусть

оператор  $\tilde{A} = \frac{d}{dt}$  ставит в соответствие каждому

многочлену его производную  $\tilde{A} f = \frac{df}{dt} =$

$= a_1 + \dots + na_n t^{n-1}$ . Очевидно, что этот оператор (оператор дифференцирования) линейный, т.к. производная от суммы равна сумме производных и постоянную можно выносить за знак производной, т.е. (1) выполняется. Оператор дифференцирования отображает  $(n+1)$ -мерное пространство  $M_{n+1}$  в  $n$ -мерное пространство  $M_n$ .

2. Если всякому вектору  $x \in X$  оператор  $\tilde{V}$  ставит в соответствие нулевой вектор  $\theta$  ( $\tilde{V} x = \theta$ ), то оператор  $\tilde{V}$  называют *нулевым*. Он отображает  $n$ -мерное пространство в нулевое. Проверить, что он линейный.

3. Если всякому вектору  $x \in X$  оператор  $\tilde{E}$  ставит в соответствие тот же вектор  $x$ , т.е.  $\tilde{E} x = x$ , то он называется *тождественным*. Тождественный оператор действует из  $X$  в  $X$ . Говорят, он действует в пространстве  $X$ . Проверить, что тождественный оператор линейный.

Оператор действующий в пространстве  $X$  называется *преобразованием пространства  $X$* . Если  $\alpha = \beta = 0$ , то  $\alpha x_1 + \beta x_2 = \theta$  и из (1) получим  $\tilde{A} \theta = \theta$ , т.е. любой линейный оператор нулевой вектор отображает в нулевой. В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные операторы.

Образ линейного оператора является подпространством пространства  $Y$ . Размерность этого подпространства называется рангом оператора  $\tilde{A}$ . Обозначают  $\dim(\text{im } \tilde{A}) = \text{rang } \tilde{A}$ . Множество векторов, удовлетворяющих равенству:

$$\tilde{A} x = \theta \quad (2)$$

называют *ядром оператора*. Очевидно, ядро — подпространство пространства  $X$ . Размерность ядра  $\dim(\ker \tilde{A})$  называют *дефектом оператора  $\tilde{A}$* .

Если ядро оператора  $\tilde{A}$  состоит только из одного нулевого вектора, т.е.  $\ker \tilde{A} = \theta$ , то оператор называют *невырожденным*. В этом случае  $\dim(\ker \tilde{A}) = 0$ .

**Теорема.** Сумма ранга и дефекта оператора  $\tilde{A}: X \rightarrow X$  равна размерности области определения, т.е.  $\dim(\operatorname{im} \tilde{A}) + \dim(\ker \tilde{A}) = \dim X$ . (без доказательства).

**Задача.** Убедиться, что оператор  $\tilde{A}$ , заданный равенством  $\tilde{A} \vec{x} = \vec{x} \times \vec{a}$  в  $R_3$ , где  $\vec{a}$  — некоторый фиксированный вектор, является линейным.

**Решение.** Т.к. пространство  $R_3$  линейное, то достаточно проверить выполнение равенства (1).

$$\tilde{A} (\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2) = (\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2) \times \vec{a} = \alpha \vec{x}_1 \times \vec{a} + \beta \vec{x}_2 \times \vec{a} = \alpha \tilde{A} \vec{x}_1 + \beta \tilde{A} \vec{x}_2.$$

Как видно, равенство (1) выполняется, и оператор  $\tilde{A}$  является линейным.

## § 2. Действия над операторами. Свойства

Рассмотрим множество операторов, действующих из  $X$  в  $Y$  и введем некоторые операции в этом пространстве.

**Опр.1.** Назовем операторы  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  равными, если  $\tilde{A} x = \tilde{B} x \forall x \in X$ . (Понятия больше, меньше для операторов не вводятся).

**Опр.2.** Оператор  $\tilde{B}$  назовем произведением оператора  $\tilde{A}$  на число  $\lambda$ ,  $\tilde{B} = \lambda \tilde{A}$ , если  $\tilde{B} x = \lambda \tilde{A} x, \forall x \in X$ .

**Опр.3.** Оператор  $\tilde{C}$  назовем суммой операторов  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$ , т.е.  $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$ , если  $\tilde{C} x = \tilde{A} x + \tilde{B} x, \forall x \in X$ .

Можно убедиться, что множество линейных операторов является линейным пространством. Роль нуля играет нулевой оператор  $\tilde{V}$ , роль единицы – тождественный оператор  $\tilde{E}$ .

Введем теперь еще одну операцию – умножение линейных операторов. Пусть  $\tilde{A}$  действует из  $X$  в  $Y$ , а  $\tilde{B}$  из  $Y$  в  $Z$ .

**Опр.4.** Оператор  $\tilde{C}$ , действующий из  $X$  в  $Z$  назовем произведением оператора  $\tilde{B}$  на оператор  $\tilde{A}$ , т.е.  $\tilde{C} = \tilde{B} \tilde{A}$ , если  $\tilde{C} x = \tilde{B}(\tilde{A} x), \forall x \in X$ .

Замечание 1. Оператор  $\tilde{B}$  можно умножить на оператор  $\tilde{A}$  только в том случае, когда образ  $\tilde{A}$  принадлежит области определения  $\tilde{B}$ , т.е. если  $\text{im } \tilde{A} \subset Y$ . Это требование выполняется, если оба оператора действуют из  $X$  в  $X$ . Для таких операторов можно ввести натуральную степень  $\tilde{A}^n = \tilde{A} \tilde{A} \dots \tilde{A}$ . Полагают  $\tilde{A}^0 = \tilde{E}$ .

**Опр.5.** Операторы  $\tilde{A}$  и  $\tilde{A}^{-1}$  называют взаимно обратными, если выполняется равенство  $\tilde{A} \tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1} \tilde{A} = \tilde{E}$ .

**Теорема.** Всякий невырожденный оператор  $\tilde{A}$  имеет обратный  $\tilde{A}^{-1}$ . При этом, если  $y = \tilde{A} x$ , то  $x = \tilde{A}^{-1} y$  (без доказательства).

Замечание 2. Если  $\dim(\ker \tilde{A}) = 0$ , то согласно теореме предыдущего параграфа  $\dim(\text{im } \tilde{A}) = \dim X$ , т.е. ранг невырожденного оператора совпадает с размерностью области определения.

Можно убедиться, что введенные операции обладают следующими свойствами:

- 1)  $\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{B} + \tilde{A}$ ;
- 2)  $(\tilde{A} + \tilde{B}) + \tilde{C} = \tilde{A} + (\tilde{B} + \tilde{C}), (\tilde{A} \tilde{B}) \tilde{C} = \tilde{A}(\tilde{B} \tilde{C})$ ;
- 3)  $\tilde{A}(\tilde{B} + \tilde{C}) = \tilde{A} \tilde{B} + \tilde{A} \tilde{C}, (\tilde{B} + \tilde{C}) \tilde{A} = \tilde{B} \tilde{A} + \tilde{C} \tilde{A}$ .



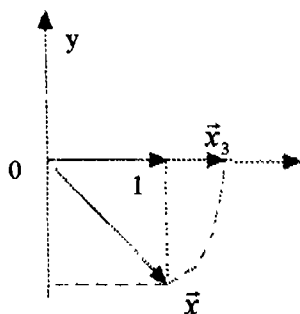
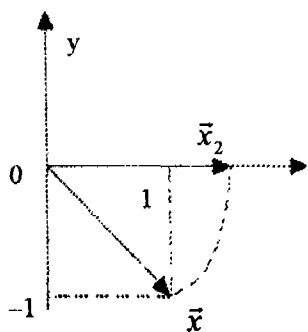
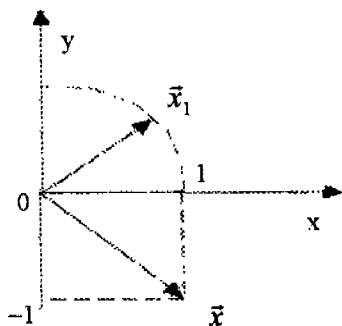
**Пример.** Операторы  $\tilde{A}$  и  $\tilde{\Pi}$  действуют в  $R_2$ .  $\tilde{A}$  – оператор поворота в плоскости  $xOy$  на угол  $\frac{\pi}{4}$  против часовой стрелки,  $\tilde{\Pi}$  – оператор проектирования на ось  $Ox$ . Найти  $\text{im } \tilde{A}$ ,  $\text{im } \tilde{\Pi}$ ,  $\text{ker } \tilde{A}$ ,  $\text{ker } \tilde{\Pi}$ . Найти результаты действия операторов  $\tilde{A} \tilde{\Pi}$ ,  $\tilde{\Pi} \tilde{A}$ ,  $\tilde{A} + \tilde{\Pi}$  на вектор  $\vec{x} = (1, -1)$ .

**Решение.** Очевидно,  $\text{im } \tilde{A} = R_2$ ,  $\text{im } \tilde{\Pi} = \lambda \vec{i}$ , т.е. ось  $Ox$ ,  $\text{ker } \tilde{A} = \theta$ ,  $\text{ker } \tilde{\Pi} = \lambda \vec{j}$ , т.е. ось  $Oy$ .

Оператор  $\tilde{A}$  невырожденный, оператор  $\tilde{\Pi}$  вырожденный.

$\tilde{A} \tilde{\Pi} \vec{x} = \vec{x}_1$ ,  $\tilde{\Pi} \tilde{A} \vec{x} = \vec{x}_2$ ,  $(\tilde{A} + \tilde{\Pi}) \vec{x} = \tilde{A} \vec{x} + \tilde{\Pi} \vec{x} = \vec{x}_3$ .

Векторы  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_2$  и  $\vec{x}_3$  изображены на рисунках.



### § 3. Матрица линейного оператора

Пусть линейный оператор  $\tilde{A}$  действует из  $X_n$  в  $Y_m$ , т.е. из  $n$ -мерного пространства в  $m$ -мерное. Зафиксируем в  $X_n$  базис  $\{e_i\}_{i=1}^n$ , а в  $Y_m$  базис  $\{q_j\}_{j=1}^m$ . Подействовав

оператором  $\tilde{A}$  на базисные векторы  $e_i$ , получим некоторые новые векторы  $e'_i \in Y_m$ . Разложим их по базису

$$\{q_j\}_{j=1}^m.$$

$$\tilde{A} e_1 = e'_1 = a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + a_{31}q_3 + \dots + a_{m1}q_m,$$

$$\tilde{A} e_2 = e'_2 = a_{12}q_1 + a_{22}q_2 + a_{32}q_3 + \dots + a_{m2}q_m, \quad (1)$$

$$\dots$$

$$\tilde{A} e_n = e'_n = a_{1n}q_1 + a_{2n}q_2 + a_{3n}q_3 + \dots + a_{mn}q_m.$$

Равенства (1) можно записать короче так:

$$\tilde{A} e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}q_i, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1')$$

**Опр.** Матрица коэффициентов системы векторов (1) столбцами которой являются коэффициенты разложения векторов  $\tilde{A} e_1, \tilde{A} e_2, \dots, \tilde{A} e_n$ , называется матрицей линейного оператора при фиксированных базисах  $\{e_i\}_{i=1}^n$  и

$$\{q_j\}_{j=1}^m.$$

$$A_{qe} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Заметим, что матрица оператора  $\tilde{A}$  имеет размер  $m \times n$ . Если оператор действует из  $X_n$  в  $X_n$ , то матрица будет квадратной размера  $n$ .

Итак, если зафиксированы базисы, то для всякого линейного оператора можно найти его матрицу. Наоборот, если матрица оператора известна, то всегда можно восстановить сам оператор. Поэтому в дальнейшем мы не будем делать особой разницы между оператором и его матрицей, если базисы зафиксированы.

Замечание. Действиям над операторами отвечают соответствующие действия над их матрицами. Если, например, операторы умножаются, то умножаются и их матрицы, ранг оператора совпадает с рангом его матрицы. Приведем несколько примеров нахождения матриц линейного оператора.

**Пример 1.** Пусть оператор нулевой, т.е.  $\tilde{V} x = \theta$ . Тогда, очевидно, матрица будет нулевой.

**Пример 2.** Найдем матрицу тождественного вектора  $\tilde{E}$ . Для произвольного базиса  $\{e_i\}_{i=1}^n$  имеем

$$\tilde{E} e_i = e_i = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 1 \cdot e_i + \dots + 0 \cdot e_n.$$

Очевидно, матрица будет единичной  $E$ .

**Пример 3.** Оператор проектирования на плоскость  $xOy$  действует в  $R_3$ . Зафиксируем базис  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  и найдем матрицу этого оператора.

$$\tilde{A} \bar{i} = \bar{i} = 1 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k},$$

$$\tilde{A} \bar{j} = \bar{j} = 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k},$$

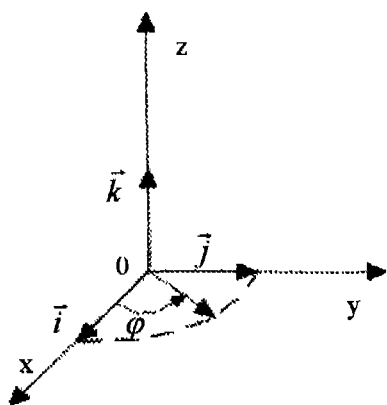
$$\tilde{A} \bar{k} = 0 = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Если этот оператор проектирования действует из  $R_3$  в  $R_2$ , то фиксируя базисы  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  и  $(\bar{i}, \bar{j})$ , получим

$$\text{матрицу } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Пример 4.** Оператор поворота на угол  $\varphi$  против часовой стрелки вокруг оси  $Oz$  действует в  $R_3$ . Зафиксируем базис  $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$  и найдем матрицу этого оператора.



$$\tilde{A} \vec{i} = \vec{i}' = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} + 0 \cdot \vec{k},$$

$$\tilde{A} \vec{j} = \vec{j}' = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} + 0 \cdot \vec{k},$$

$$\tilde{A} \vec{k} = \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k},$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 5.** Найти матрицы операторов  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{\Pi}$ ,  $\tilde{\Pi} \tilde{A}$ ,  $\tilde{A} \tilde{\Pi}$ ,  $\tilde{A} + \tilde{\Pi}$  (см. Пример предыдущего §). Операторы действуют в  $R_2$ .

**Решение.** Зафиксируем базис  $(\vec{i}, \vec{j})$  и воспользуемся результатами примеров 3 и 4. Получим

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Умножая и складывая полученные матрицы, получим матрицы операторов  $\tilde{\Pi} \tilde{A}$ ,  $\tilde{A} \tilde{\Pi}$ ,  $\tilde{A} + \tilde{\Pi}$ :

$$\Pi A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A + \Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

**Пример 6.** Найти матрицу оператора дифференцирования  $\frac{d}{dt}$ , действующего в  $M^{n+1}$ , где  $M^{n+1}$  – пространство многочленов степени не выше  $n$ .

**Решение.** Зафиксируем базис  $e_0 = 1, e_1 = t, e_2 = t^2, \dots, e_n = t^n$ .

Тогда

$$\frac{de_0}{dt} = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^n,$$

$$\frac{de_1}{dt} = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^n,$$

$$\frac{de_2}{dt} = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^n,$$

.....

$$\frac{de_n}{dt} = n t^{n-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + n t^{n-1} + 0 \cdot t^n.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

**Упражнение.** Найти матрицу оператора примера 6, если базис следующий:  $e_0 = 1, e_1 = t, e_2 = \frac{1}{2!}t^2, \dots, e_n = \frac{1}{n!}t^n$ .

#### § 4. Преобразования вектора и матрица при переходе к новому базису

Пусть  $\{e_i\}_{i=1}^n$  и  $\{e'_i\}_{i=1}^n$  – старый и новый базисы в пространстве  $R_n$  и пусть оператор  $\tilde{T}$ , действующий в  $R_n$ ,

переводит старый базис в новый, т.е

$$e'_k = \tilde{T} e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Пусть оператор  $\tilde{T}$  в старом базисе имеет матрицу  $T = (t_{ij})$ . Эта матрица называется *матрицей перехода*. Если ввести матрицы  $\mathcal{E} = (e_1 e_2 \dots e_n)$  и  $\mathcal{E}' = (e'_1 e'_2 \dots e'_n)$ , то равенство (1) можно записать в матричном виде

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} T \quad (1')$$

Пусть  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  и  $x = \sum_{k=1}^n x'_k e'_k$  - разложения одного и того же вектора  $x$  в старом и в новом базисах. Тогда

$$\sum_{k=1}^n x_k e_k = \sum_{k=1}^n x'_k e'_k \quad (2)$$

Выясним, как связаны между собой старые и новые координаты вектора  $x$ . Введем матрицы-столбцы  $X = (x_1 x_2 \dots x_n)^T$ ,  $X' = (x'_1 x'_2 \dots x'_n)^T$  и запишем (2) в матричном виде

$$\mathcal{E} X = \mathcal{E}' X' \quad (2')$$

С учетом (1') получим  $\mathcal{E} X = \mathcal{E} T X'$ . Умножая последнее равенство на  $\mathcal{E}^{-1}$ , найдем

$$X = T X' \quad (3)$$

Формула (3) выражает старые координаты вектора  $x$  через новые.

Пусть оператор  $\tilde{A}$  также действует в  $R_n$  и преобразует вектор  $x \in R_n$  в вектор  $y \in R_n$ , т.е  $y = \tilde{A} x$ . Если  $A$  и  $A'$  - матрицы оператора  $\tilde{A}$  в старом и в новом базисах, то

$$Y = A X \quad (4)$$

$$\text{и} \quad Y' = A' X' \quad (5)$$

Выясним, как связаны между собой матрицы одного и того же оператора в старом и новом базисах. Поскольку  $Y = T Y'$ ,  $X = T X'$  (см. (3)), то равенство (4) перепишем так

$T Y' = A T X'$  или  $Y' = T^{-1} A T X'$ . Сравнивая последнее равенство с (5), получим, в силу единственности преобразования

$$A' = T^{-1} A T. \quad (6)$$

Равенство (6) есть формула перехода от матрицы в старом базисе к матрице в новом. Матрицы  $A$  и  $A'$  связанные формулой (6), называются подобными.

**Теорема 1.** Определитель произведения матриц равен произведению определителей, т.е.  $\det(A B) = \det A \det B$  (без доказательства).

**Теорема 2.** Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

**Доказательство.** Согласно теореме 1 из (6) получим  $\det A' = \det(T^{-1}) \cdot \det A \cdot \det T = \det A \cdot \det(T^{-1} T) = \det A \cdot \det E = \det A$ . Теорема доказана.

Замечание. Матрицу перехода найдем из (1')  $T = \mathcal{E}^{-1} \mathcal{E}'$ . Если старый базис ортонормированный, то  $\mathcal{E} = E$  — единичная матрица. Тогда  $T = \mathcal{E}'$ , т.е. столбцами матрицы перехода являются координаты базисных векторов нового базиса.

## § 5. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Пусть линейный оператор  $\tilde{A}$  действует в  $R_n$  и  $\{q_i\}_{i=1}^n$  — ортонормированный базис в  $R_n$ .

**Опр.** Число  $\lambda$  называется собственным значением (собственным числом), а ненулевой вектор  $x$  — собственным вектором оператора  $\tilde{A}$ , отвечающим собственному числу  $\lambda$ , если имеет место равенство

$$\tilde{A} x = \lambda x. \quad (1)$$

Например, тождественный оператор  $\tilde{E} x = x$  имеет одно собственное число  $\lambda = 1$  и бесконечное число собственных векторов.

Дадим способ нахождения собственных чисел и собственных векторов для любого линейного оператора  $\tilde{A}$ . Перепишем (1) так:

$$(\tilde{A} - \lambda \tilde{E}) x = 0. \quad (2)$$

Если  $A$  — матрица оператора  $\tilde{A}$ ,  $E$  — единичная матрица тождественного оператора  $\tilde{E}$ ,  $x = X = (x_1 x_2 \dots x_n)^T$  — собственный вектор, то (2) можно переписать в матричном виде  $(A - \lambda E) X = 0$  (3)

или в развернутом виде

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (3')$$

Раскрывая определитель системы (3')

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}, \quad (4)$$

получим многочлен  $n$ -ой степени относительно  $\lambda$

$$\det(A - \lambda E) = \Delta(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Этот многочлен называют *характеристическим многочленом оператора  $\tilde{A}$* . Система (3') имеет нетривиальное решение, как известно, только в том случае, если ее определитель обращается в нуль



$$\det(A - \lambda E) = \Delta(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (5)$$

Поскольку уравнение (5) всегда имеет решение, то любой линейный оператор имеет собственные значения. Правда, они могут быть комплексными, кратными. Совокупность всех собственных чисел называют *спектром оператора*.

Замечание. Так как определитель  $\det(A - \lambda E)$  не зависит от выбора базиса (см. Т.2 §4), то собственные числа оператора не изменятся с изменением базиса.

Пусть  $\lambda_i$  — собственное число, т.е.  $\det(A - \lambda_i E) = 0$ . Подставим его в систему (3'). Поскольку ее определитель равен нулю при  $\lambda = \lambda_i$ , то она имеет бесконечное множество решений. Это значит, что любой линейный оператор имеет бесконечное множество собственных векторов. Однако, линейно независимых среди них, как известно, только  $(n - r_i)$ , где  $r_i = \text{rang}(A - \lambda_i E)$  (см. §14, гл.1).

**Пример 1.** Линейный оператор задан своей матрицей

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ . Найти собственные числа и собственные векторы.

**Решение.** Составим и решим характеристическое уравнение.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9.$$

Подставим собственное число  $\lambda_1 = 1$  в систему (3'),

получим  $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$  Система имеет одно линейно

независимое решение. В качестве такового возьмем

$$e_1 = (x_1, x_2) = (-1, 1).$$

При  $\lambda_2 = 9$  аналогично получим  $e_2 = (1, 1)$ . Можно проверить, что собственные векторы  $e_1 = (-1, 1)$  и  $e_2 = (1, 1)$  линейно независимы и образуют базис в пространстве собственных векторов заданного оператора.

**Пример 2.** Найти собственные числа и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**  $\det(A - \lambda E) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = 0, \Rightarrow$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7.$$

При  $\lambda_1 = 1$  получим систему 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Поскольку ранг матрицы этой системы равен 1, то она имеет два линейно независимых решения:  $e_1 = (2, 1, 0)$ ,

$$e_2 = (1, 0, 1).$$

При  $\lambda_3 = 7$  система (3') имеет одно линейно независимое решение  $e_3 = (1, -2, -1)$ .

Итак, и в этом случае собственные векторы  $e_1 = (2, 1, 0)$ ,

$$e_2 = (1, 0, 1), e_3 = (1, -2, -1) \text{ образуют базис.}$$

## § 6. Жорданова форма матрицы

Разбивая матрицу на клетки (блоки), получим *блочную матрицу*. Например,

$$A_1 = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 8 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 3 & -1 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 8 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрица называется *блочно-диагональной*, если по главной диагонали стоят квадратные матрицы, а все остальные элементы равны нулю. Например,

$$A_2 = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \end{array} \right).$$

*Клеткой Жордана* называется квадратная матрица, по главной диагонали которой стоит одно и то же число, над главной диагональю стоят единицы, а остальные элементы равны нулю. Например,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Опр.** Матрица имеет жорданову форму, если она блочно-диагональная, а по главной диагонали стоят клетки Жордана. Например,

$$A_3 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Частным случаем матрицы жордановой формы является диагональная матрица. У нее по диагонали стоят клетки Жордана единичного размера.

Матрицу жордановой формы общего вида порядка  $n$  записывают так:

$$J = \left( \begin{array}{cccc} J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k} \end{array} \right) = (J_{n_1} J_{n_2} \dots J_{n_k}).$$

Здесь  $J_{n_i}$  — клетка Жордана порядка  $n_i$ , так что  $\sum_{i=1}^k n_i = n$ .

Известно, что линейный оператор  $\tilde{A}$  от выбора базиса не зависит, но его матрица меняется согласно формуле

$$A' = T^{-1} A T. \quad (1)$$

Поэтому, меняя базис, мы можем упростить вид матрицы. Рассмотрим сначала случай, когда матрицу можно привести к диагональному виду.

**Теорема 1.** Система собственных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_m$  оператора  $\tilde{A}$ , отвечающая различным собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , линейно независима (без доказательства).

**Следствие.** Если оператор  $\tilde{A}$  действует в  $R_n$  и все его собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  различные, то его

собственные векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют базис в  $R_n$ .  
Доказательство очевидно.

**Теорема 2.** Матрица линейного оператора  $\tilde{A}$  в базисе из собственных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  имеет диагональный вид, при этом по диагонали стоят собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

**Доказательство.** Найдем матрицу оператора  $\tilde{A}$  в базисе  $\{e_i\}_{i=1}^n$  из собственных векторов. Для этого воспользуемся формулами (1) § 3.

$$\tilde{A} e_1 = \lambda_1 e_1 = \lambda_1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n,$$

$$\tilde{A} e_2 = \lambda_2 e_2 = 0 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n, \Rightarrow$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\tilde{A} e_n = \lambda_n e_n = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ Теорема доказана.}$$

**Пример 1.** Привести матрицу  $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  к диагональному виду.

**Решение. 1-й способ.** Поскольку собственные векторы  $e_1 = (-1, 1)$  и  $e_2 = (1, 1)$  образуют базис в  $R_2$  (см. пр. 1 §5), где действует оператор, то согласно теореме 2 матрица  $A$  примет диагональный вид  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ .

2-й способ. Найдем матрицу перехода  $T = (e_1, e_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $T^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Воспользуемся формулой (1). Получим

$$A' = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** Привести матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  к диагональному виду.

**Решение.** Составим и решим характеристическое уравнение.  $\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 = 0, \Rightarrow$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Найдем собственные векторы, которые являются решением системы:  $\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$

Система имеет одно линейно независимое решение  $e_1 = (1, -2)$ . Этот единственный собственный вектор не может образовать базис в  $R_2$ , поэтому известными нам по первому примеру методами мы не можем привести данную матрицу к диагональному виду. Можно доказать, что ее нельзя привести к диагональному виду никакими другими методами.

**Вывод.** Если корни характеристического уравнения  $\Delta(\lambda) = 0$  простые, то согласно теоремам 1 и 2 матрица приводится к диагональному виду. В случае кратных корней каждому корню  $\lambda_i$  соответствует  $n - \text{rang}(A - \lambda_i E)$  линейно независимых векторов. Отсюда ясно, если  $n - \text{rang}(A - \lambda_i E) = k_i$ , где  $k_i$  – кратность корня  $\lambda_i$ , то матрица

приводится к диагональному виду. Если  $n - \text{rang}(A - \lambda_i E) < k_i$  - не приводится.

Заметим, что матрица пр.2 §5 приводится к диагональной, хотя и имеет кратные собственные числа.

**Опр.** Вектор  $x$  называется *присоединенным вектором* оператора  $\tilde{A}$ , отвечающим собственному числу  $\lambda$ , если  $(\tilde{A} - \lambda \tilde{E})^m x = 0$ , а  $(\tilde{A} - \lambda \tilde{E})^{m-1} x \neq 0$ ,  $m = 2, 3, \dots$  (2)

Число  $m$  называется *порядком* присоединенного вектора.

**Теорема 3.** Для всякого линейного оператора, действующего в  $R_n$ , существует базис из собственных и присоединенных векторов, в котором матрица оператора имеет жорданову форму. При этом базисные векторы находятся по формулам:

$$\tilde{A} e_k^1 = \lambda_k e_k^1, \quad (3)$$

$$\tilde{A} e_k^m = \lambda_k e_k^m + e_k^{m-1} \quad (4)$$

(без доказательства).

Порядок приведения матрицы к жордановой форме следующий. Находим из (3) собственный вектор  $e_k^1$ , соответствующий собственному числу  $\lambda_k$ . Полагаем в (4)  $m = 2$  и находим присоединенный вектор  $e_k^2$ . Затем, полагая в (4)  $m = 3$ , находим  $e_k^3$  и т.д. пока, не придем при некотором  $m$  к противоречивой системе. Если для любого собственного вектора  $e_k^1$  система (4) противоречива при  $m = 2$ , то следует взять линейную комбинацию собственных векторов  $\sum_k \alpha_k e_k^1$  и подставить ее в (4).

Жорданова форма матрицы получается по формуле  $T^{-1} A T = J$ . Столбцами матрицы  $T$  являются координаты собственных  $e_k^1$  и присоединенных  $e_k^m$  векторов.

**Пример 3.** Привести матрицу  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  к

жордановой форме.

**Решение.** Составим характеристическое уравнение и найдем собственные числа.

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 2)^3 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Воспользуемся (3) и составим систему  $(A - 2E)e_k^1 = 0$ .

Найдем  $\text{rang}(A - 2E) = 1$ ,  $n - \text{rang}(A - 2E) = 2$ . Это значит, что решением системы являются два линейно независимых собственных вектора. Запишем их в виде

$$e_1^1 = (1, 2, 0), e_2^1 = (1, 2, 1).$$

Положим теперь в (4)  $m = 2$ ,  $k = 1$ , т.е. подставим в (4)

$e_1^1 = (1, 2, 0)$ . Получим следующую систему  $(A - 2E)e_1^2 = e_1^1$ .

Легко убедиться, что эта система противоречива. Положим в (4)  $m = 2$ ,  $k = 2$ , т.е. подставим  $e_2^1 = (1, 2, 1)$ . Получим систему  $(A - 2E)e_2^2 = e_2^1$ . Решая ее, найдем

присоединенный вектор  $e_2^2 = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ .

Итак, векторы  $e_1^1 = (1, 2, 0)$ ,  $e_2^1 = (1, 2, 1)$ ,  $e_2^2 = \left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$

образуют базис в  $R_3$ , в котором матрица  $A$  имеет форму Жордана.

Составим матрицы  $T$  и  $T^{-1}$ .

$$T = (e_1^1 e_2^1 e_2^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Используя формулу (1), найдем жорданову форму матрицы  $A$ .

$$J = T^{-1} A T = \left( \begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

**Замечание.** Очевидно, матрица примера 2 приводится к клетке Жордана  $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Находить базис нет необходимости.

**Упражнение.** Привести матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$  к жордановой форме.

**Ответ.**  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

## § 7. Функции от матриц

В основе определения функции от матрицы лежит определение возведения матрицы в натуральную степень. Так как эта операция определена только для квадратных матриц, то и функции от матриц определяются только для квадратных матриц.

Рассмотрим диагональную матрицу второго порядка  $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Докажем, что

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Воспользуемся методом математической индукции. Проверим (1) при  $n = 2$ .

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}.$$

Как видно, равенство (1) выполняется. Предположим, что оно выполняется при  $n = k$ . Если из этого предположения будет следовать, что (1) справедливо при  $n = k + 1$ , то равенство (1) будет доказано.

$$\Lambda^{k+1} = \Lambda^k \cdot \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Равенство (1) доказано.

Аналогично можно доказать, что формула (1) справедлива для диагональной матрицы любого порядка. Более того, она справедлива для любой блочно-диагональной матрицы. В частности для матрицы жордановой формы

$J = (J_{n_1} J_{n_2} \dots J_{n_k})$  получим

$$J^m = (J_{n_1}^m J_{n_2}^m \dots J_{n_k}^m). \quad (2)$$

Пусть  $J_{n_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$  — клетка Жордана

порядка  $n_i$ .

Тогда

$$J_{n_i}^m = \begin{pmatrix} \lambda_i^m & m\lambda_i^{m-1} & \frac{1}{2!}m(m-1)\lambda_i^{m-2} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i^m & m\lambda_i^{m-1} & \dots & m\lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_i^m \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Формулу (3) также можно доказать методом математической индукции.

**Теорема 1.** Если  $T$  невырожденная матрица, то

$$T^{-1} A^n T = (T^{-1} A T)^n. \quad (4)$$

Для доказательства теоремы опять воспользуемся методом математической индукции. Проверим теорему при  $n = 2$ .

$$(T^{-1} A T)^2 = T^{-1} A T T^{-1} A T = T^{-1} A A T = T^{-1} A^2 T.$$

Как видно, равенство (4) выполняется. Пусть оно верно  $n = k$ . Тогда

$$\begin{aligned} (T^{-1} A T)^{k+1} &= (T^{-1} A T)^k (T^{-1} A T) = T^{-1} A^k T T^{-1} A T = \\ &= T^{-1} A^{k+1} T. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Следствие.**  $A^n = T (T^{-1} A T)^n T^{-1}. \quad (5)$

Формула (5) получается из (4) путем умножения слева на  $T$  и справа на  $T^{-1}$ .

Замечание. Если  $T^{-1} A T = J$  — матрица жордановой формы, то (5) примет вид:

$$A^n = T^{-1} J^n T. \quad (6)$$

Формула (6) удобна для возведения произвольной матрицы в натуральную степень.

**Пример 1.** Найти  $A^5$ , если  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Решение.** Матрица  $A$  приводится к жордановой форме (см. пример 3 §6).

$$J = T^{-1} A T = \left( \begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array} \right) = (J_1 J_2).$$

Используя формулы (6) и (3), получим

$$\begin{aligned}
 A^5 &= T (J_1^5 J_2^5) T^{-1} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0,5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 5 \cdot 2^4 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1,5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -128 & 80 & 0 \\ -320 & 192 & 0 \\ -160 & 80 & 32 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**Опр.** Функция  $f(t)$  называется определенной на спектре матрицы  $A$ , если существуют

$$f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \dots, f^{(n_i-1)}(\lambda_i), \quad (7)$$

для всех собственных чисел  $\lambda_i$  матрицы  $A$ .

Здесь  $n_i$  – порядок клетки Жордана, соответствующей собственному числу  $\lambda_i$ .

Если функция  $f(t)$  определена на спектре матрицы  $A$ , то матрицу  $f(A)$  определяют формулами:

$$f(A) = T f(J) T^{-1}, \quad (8)$$

где  $J = T^{-1} A T$ ,

$$f(J) = \left( f(J_{n_1}) f(J_{n_2}) \dots f(J_{n_k}) \right), \quad (9)$$

$$f(J_{n_i}) = \begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!} f''(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(n_i-1)!} f^{(n_i-1)}(\lambda_i) \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \dots & \frac{1}{(n_i-2)!} f^{(n_i-2)}(\lambda_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Формулы (8,9,10) аналогичны формулам (6,2,3).

**Пример 2.** Найти  $e^{\alpha A}$ , где  $A$  – матрица примера 1,  $\alpha$  – некоторое число.

**Решение.** Рассмотрим функцию  $f(t) = e^{\alpha t}$ . Она, очевидно, определена на спектре матрицы  $A$ . Матрица  $A$  приводится

к жордановой  $J = (J_1 J_2)$ ,  $J_1 = (2)$ ,  $J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Вспользуемся формулой (10), получим

$$f(J_1) = e^{2\alpha}, f(J_2) = \begin{pmatrix} e^{2\alpha} & \alpha \cdot e^{2\alpha} \\ 0 & e^{2\alpha} \end{pmatrix}.$$

По формуле (9) найдем:

$$f(J) = e^{\alpha J} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\alpha} & \alpha \cdot e^{2\alpha} \\ 0 & 0 & e^{2\alpha} \end{pmatrix}.$$

И, наконец, по формуле (8) получим

$$\begin{aligned} f(A) &= e^{\alpha A} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0,5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\alpha} & \alpha \cdot e^{2\alpha} \\ 0 & 0 & e^{2\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1,5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= e^{2\alpha} \begin{pmatrix} 1-2\alpha & \alpha & 0 \\ -4\alpha & 1+2\alpha & 0 \\ -2\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если функция  $f(t)$  разлагается в ряд Тейлора

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^k.$$

сходящийся в круге  $|t-t_0| < R$ , то, очевидно, она определена на спектре матрицы  $A$ , если собственные числа  $\lambda$ , матрицы  $A$  удовлетворяют условию  $|\lambda - t_0| < R$ .

В этом случае положим по определению

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - t_0 E)^k. \quad (11)$$

В частности  $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$  (12)

$$\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} A^{2k}. \quad (13)$$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} A^{2k+1} \quad (14)$$

Эти ряды справедливы для любой квадратной матрицы.

**Упражнение.** Найти  $\ln A$ , где  $A$  – матрица примера 1.

**Ответ.**  $\ln A = \begin{pmatrix} \ln 2 - 1 & 0,5 & 0 \\ -2 & \ln 2 + 1 & 0 \\ -1 & 0,5 & \ln 2 \end{pmatrix}.$

## § 8. Функциональные матрицы

Матрица  $X(t) = (x_{ij}(t))_{m \times n}$  называется *функциональной*, если ее элементы являются функциями переменного  $t$ . Все действия и свойства, известные для числовых матриц, переносятся на функциональные. Но для функциональных матриц можно ввести и другие действия, например, дифференцирование, интегрирование.

Матрица  $A = (a_{ij})$  называется пределом матрицы  $X(t)$  при  $t \rightarrow t_0$ , если  $\lim_{t \rightarrow t_0} x_{ij}(t) = a_{ij}$ . Пишут  $\lim_{t \rightarrow t_0} X(t) = A$ . Если элементы  $x_{ij}(t)$  матрицы  $X(t)$  непрерывные функции, то матрица  $X(t)$  называется непрерывной

Производная и интеграл от функциональной матрицы определяются формулами:

$$\dot{X}(t) = \left( \dot{x}_y(t) \right), \int_{t_0}^t X(\tau) d\tau = \left( \int_{t_0}^t x_y(\tau) d\tau \right). \quad (1)$$

Свойства производной и интеграла от функции переносятся на производные и интеграл от функциональной матрицы. Следует только помнить, что для матриц коммутативный закон не справедлив.

Наиболее распространенной функциональной матрицей является матричная экспонента  $X(t) = e^{tA}$ , где  $A$  — числовая матрица. Согласно (12) §7

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \quad (2)$$

Дифференцируя почленно ряд (2), получим

$$(e^{tA})'_t = A e^{tA}. \quad (3)$$

Можно проверить, что  $e^{\tau A} \cdot e^{tA} = e^{(\tau+t)A}$ ,  $e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$ ,  $e^{tA} \cdot e^{tB} = e^{t(A+B)}$ , если  $AB = BA$ .

**Пример 1.** Найти  $\int_0^1 e^{tA} dt$ , где  $A$  — матрица примера 1 §7.

**Решение.** Согласно результату примера 2 §7

$$e^{tA} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-2t & t & 0 \\ -4t & 1+2t & 0 \\ -2t & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Интегрируя каждый элемент этой матрицы, получим

$$\int_0^1 e^{tA} dt = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4}(1+e^2) & 0 \\ -1-e^2 & e^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}(1+e^2) & \frac{1}{4}(1+e^2) & \frac{1}{2}(e^2-1) \end{pmatrix}.$$

Замечание. Данный интеграл можно вычислить по формуле:

$$\int_0^1 e^{tA} dt = A^{-1} e^{tA} \Big|_0^1 = A^{-1}(e^A - E).$$

Разложим определитель функциональной матрицы  $A(t)$  по элементам  $i$ -ой строки.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad (4)$$

Возьмем от определителя (4) частную производную по  $a_{ij}$ , получим

$$\frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} = A_{ij} \quad (5)$$

Поскольку в алгебраическое дополнение  $A_{ij}$  элемент  $a_{ij}$  не входит оно не зависит от  $a_{ij}$ . Найдем теперь производную определителя (4) по независимой переменной  $t$ . По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{d|A|}{dt} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} \cdot \frac{da_{ij}}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \dot{a}_{ij} \frac{\partial |A|}{\partial a_{ij}} \right). \quad (6)$$

Здесь ради упрощения записи производная по  $t$  обозначается точкой. Учитывая (5), перепишем (6) так:

$$\frac{d|A|}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \dot{a}_{ij} A_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n |A_i|. \quad (7)$$

Определитель  $|A_i| = \sum_{j=1}^n \dot{a}_{ij} A_{ij}$  получается из определителя

$|A|$  заменой  $i$ -ой строки на строку производных элементов этой строки. Итак,



$$\frac{d|A|}{dt} = \sum_{i=1}^n |A_i|. \quad (7)$$

**Пример 2.** Найти производную определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} t & \sin t \\ \cos t & t^2 \end{vmatrix}.$$

**Решение.** Согласно (7) получим

$$\frac{d|A|}{dt} = \begin{vmatrix} 1 & \cos t \\ \cos t & t^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & \sin t \\ -\sin t & 2t \end{vmatrix}.$$

# ГЛАВА 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения

## § 1. Основные понятия

Под дифференциальным уравнением понимают такое уравнение, которое связывает неизвестную функцию, ее независимые переменные и производные этой функции. Если неизвестная функция одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)*, если неизвестная функция многих переменных, то уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных*.

*Порядком* дифференциального уравнения называют наивысший порядок входящей в уравнение производной неизвестной функции. Общий вид ОДУ  $n$ -го порядка

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $y = y(x)$  – неизвестная функция,  $x$  – независимое переменное.

Приведем некоторые примеры.

1.  $y = xy' + f(y')$  – ОДУ первого порядка (уравнение Клеро).
2.  $\sum_{k=0}^n a_k x^k y^{(k)} = f(x)$  – ОДУ  $n$ -го порядка (уравнение Эйлера).
3.  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$  – ОДУ второго порядка (уравнение Бесселя).
4.  $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = f\left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$  – ОДУ второго порядка (второй закон Ньютона).

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  - уравнение в частных производных

первого порядка (уравнение Холфа, описывающее распространение ударных волн)

6  $\Delta u = 0$ ,  $\Delta u = f(x, y, z)$ ,  $\Delta u = \frac{1}{a^2} u'_i$ ,  $\Delta u = \frac{1}{a^2} u''_{ii}$ , где

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  - дифференциальный оператор. Все

эти уравнения в частных производных Их называют уравнениями математической физики.

Мы будем рассматривать только ОДУ.

Функция  $y = y(x)$ , дифференцируемая  $n$  раз на некотором интервале и обращающая уравнение (1) в тождество, называется его решением, или интегралом График этой функции называется интегральной кривой. Сам процесс нахождения решения дифференциального уравнения называют интегрированием уравнения

Простейшим примером интегрирования дифференциального уравнения является нахождение первообразной для заданной функции  $f(x)$  Если  $F(x)$  - ее первообразная, то  $F'(x) = f(x)$  Получили ОДУ

первого порядка Перепишем его в виде  $\frac{dF}{dx} = f(x)$ ,  $dF = f(x) dx$  Интегрируя последнее равенство, получим решение дифференциального уравнения  $F(x) = \int f(x) dx + C$  Как видно, решением является не одна

функция, а целое семейство

Рассмотрим еще один пример. Известно, что скорость распада радия пропорциональна наличному количеству радия Пусть в момент времени  $t_0$  имелось  $m_0$  грамм радия Определить количество  $m$  радия в любой момент

времени  $t$ . Очевидно  $\frac{dm}{dt}$  — скорость распада радия (предполагаем, что масса является непрерывной и дифференцируемой функцией времени). По условию  $\frac{dm}{dt} = -km$ , где  $k > 0$  — коэффициент пропорциональности. Получили ОДУ первого порядка. Перепишем его так:  $\frac{dm}{m} = -kdt$ . Интегрируя обе части равенства, получим

$$\ln m = -kt + C, \quad m = e^{-kt} \cdot e^C. \quad (2)$$

Решений опять получилось бесконечное множество, но физически ясно, что решение задачи должно быть единственным. Используем данные условия:  $m = m_0$ , при  $t = t_0$  (их называют начальными). Подставим начальные условия в решение (2), получим  $m_0 = e^{-kt_0} \cdot e^C \Rightarrow e^C = m_0 e^{kt_0}$ . Тогда  $m = m_0 e^{k(t_0-t)}$  — единственное решение, удовлетворяющее начальному условию.

$$\text{Уравнение } (x - C)^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

при произвольном значении параметра  $C$  геометрически представляет собой, как известно, семейство окружностей единичного радиуса, центры которых расположены на оси абсцисс. Найдем дифференциальное уравнение этого семейства. Для этого продифференцируем тождество (3) и исключим параметр  $C$ , т.е. решим систему

$$\begin{cases} 2(x - C) + 2y \cdot y' = 0, \\ (x + C)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{В результате получим } y^2 \left( (y')^2 + 1 \right) = 1 - \quad (4)$$

искмое дифференциальное уравнение. Его решением является семейство окружностей (3).

## § 2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Частное, общее и особое решения

Простейшим ОДУ является уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Если уравнение (1) можно разрешить относительно производной, то получим равносильное уравнение

$$y' = f(x, y), \quad (2)$$

которое называется дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме.

Задача нахождения решения уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию

$$y(x_0) = y_0, \quad (3)$$

называется задачей Коши

**Теорема (существования и единственности).** Пусть функция  $f(x, y)$  уравнения (2) определена и непрерывна вместе со своей частной производной  $f'_y(x, y)$  в некоторой области  $D$  плоскости  $(x, y)$  и пусть  $(x_0, y_0) \in D$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $x_0$  существует единственное решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию (3) (без доказательства).

Геометрически это означает, что через точку  $(x_0, y_0)$  проходит единственная интегральная кривая  $y = y(x)$ . Если условия теоремы не выполняются, то через точку  $(x_0, y_0)$  может проходить множество интегральных кривых, а может и ни одной.

Решение  $y = \varphi(x, C)$ , зависящее от произвольной постоянной  $C$ , называется *общим решением* уравнения (2), если выбором параметра  $C$  можно удовлетворить

допустимым начальным условиям (3), т.е. уравнение  $y_0 = \varphi(x_0, C)$  разрешимо относительно  $C$ . Всякое решение, полученное из общего при некотором значении параметра  $C$ , называется *частным*. Интегральная кривая называется *особым решением* уравнения (2), если через каждую ее точку проходит другая интегральная кривая. Очевидно, особое решение возможно только в тех точках, где нарушаются условия теоремы существования и единственности.

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение  $y^2(1+(y')^2) = 1$ . Общим решением этого уравнения является семейство окружностей

$$(x - C)^2 + y^2 = 1 \quad (\text{см. (3)})$$

§1). При  $C = 0$  получим частное решение

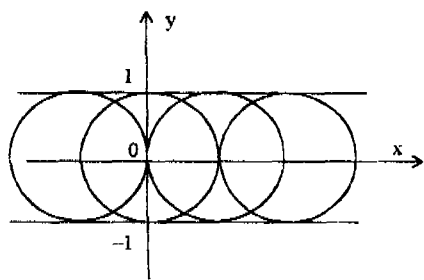
$$x^2 + y^2 = 1,$$

удовлетворяющее начальному условию  $y(0) = 1$ . Разрешая

дифференциальное уравнение относительно  $y'$ , получим

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}. \quad \text{Здесь функция } f(x, y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, \text{ и на}$$

прямых  $y = \pm 1$  нарушаются условия теоремы существования. Непосредственной проверкой легко убедиться, что прямые  $y = \pm 1$  являются решением данного уравнения. Эти решения особые, т.к. каждой точке этих прямых касается одна из окружностей семейства. Заметим, что особые решения не получаются из общего ни при каких значениях параметра  $C$ .



Пусть  $\Phi(x, y, C) = 0$  – некоторое семейство кривых. Кривая  $y = f(x)$  называется огибающей этого семейства, если в каждой своей точке она касается одной из кривых семейства, и ни на каком участке не совпадает с одной из кривых семейства. Можно убедиться, что совместность системы

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

является необходимым условием существования огибающей.

Если  $\Phi(x, y, C) = 0$  является общим решением уравнения (2), то огибающая этого семейства, если она существует, является, очевидно, особым решением уравнения (2).

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение Клеро  $y = xy' + (y')^2$ . Можно убедиться, что семейство прямых  $y = Cx + C^2$  является общим решением данного уравнения в области  $D$

$= \left\{ (x, y) : y \geq -\frac{1}{4}x^2 \right\}$ . Составим систему (4)

$$\begin{cases} Cx + C^2 - y = 0, \\ x + 2C = 0. \end{cases} \quad (4')$$

Исключая из (4') параметр  $C$ , получим  $y = -\frac{1}{4}x^2$ .

Подстановкой в уравнение Клеро убедимся, что  $y = -\frac{1}{4}x^2$  является его решением. Так как ни при каких значениях  $C$  оно не получается из общего решения, то это особое решение.

Если решение ОДУ выражается через элементарные функции или через конечное число неопределенных интегралов от элементарных функций, то уравнение

называют *разрешимым в квадратурах*. Мы будем рассматривать, в основном, только такие уравнения. Уравнения неразрешимые в квадратурах решаются приближенными методами.

### § 3. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения

**Опр. 1.** Дифференциальное уравнение  $y' = f(x, y)$  называется уравнением с разделяющимися переменными, если его правая часть имеет вид:  $f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$ .

В этом случае

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x) dx, \quad \int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x) dx + C, \quad (1)$$

т.е. уравнение с разделяющимися переменными разрешимо в квадратурах, если функция  $f(x, y)$  элементарная. Равенство (1) представляет собой его общее решение.

Замечание. Если  $\psi(y_1) = 0$ , то  $y = y_1$  является решением и его следует присоединить к общему решению (1).

К уравнению с разделяющимися переменными приводится уравнение вида

$$y' = f(ax + by + C). \quad (2)$$

Действительно, введем замену  $z = ax + by + C$ . Тогда

получим 
$$\frac{dz}{dx} = a + by' = a + bf(z)$$

уравнение с разделяющимися переменными.

**Пример 1.** Решить уравнение  $y' = \cos(x - y + 1)$ .

**Решение.** Пусть  $z = x - y + 1$ , тогда  $\frac{dz}{dx} = 1 - \cos z$ ,



$$\frac{dz}{1 - \cos z} = dx, \quad \int \frac{dz}{2 \sin^2 \frac{z}{2}} = x + C, \quad -\operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C,$$

$$z = -2 \operatorname{arccctg}(x + C), \quad y = x + 1 + 2 \operatorname{arccctg}(x + C).$$

Если  $1 - \cos z = 0$ , то  $z = 2\pi k$  или  $y = x + 1 + 2\pi k$ . Итак, общим решением данного уравнения является совокупность решений

$$y = x + 1 + 2 \operatorname{arccctg}(x + C) \text{ и } y = x + 1 + 2\pi k,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Опр. 2.** Уравнение  $y' = f(x, y)$  называется однородным, если его правую часть можно записать в виде

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, введем

$$\text{замену } z = \frac{y}{x}. \text{ Тогда } y = xz, \quad y' = z + x \frac{dz}{dx} = \varphi(z),$$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}(\varphi(z) - z)$ . Получили уравнение с разделяющимися переменными.

**Пример 2.** Решить уравнение  $(x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$ .

**Решение.** Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2 \frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Данное уравнение однородное. Введем замену  $y = xz$ ,

$$y' = z + x \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{1 - z^2}, \quad x \frac{dz}{dx} = \frac{z + z^3}{1 - z^2}, \quad \frac{1 - z^2}{z + z^3} dz = \frac{dx}{x}.$$

Разлагая дробь на простейшие, после интегрирования получим  $\ln z - \ln(1+z^2) = \ln x + \ln C$ ,  $\frac{z}{1+z^2} = xC$ .

Подставляя значение  $z = \frac{y}{x}$  и освобождаясь от знаменателя получим  $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}C\right)^2 = \left(\frac{1}{2}C\right)^2$  — семейство окружностей, касающихся оси  $Ox$  в начале координат. Кроме того решением является  $y = 0$ . Особых решений нет.

К однородному или к уравнению с разделяющимися переменными приводится уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + C_1}{a_2x + b_2y + C_2}\right). \quad (3)$$

Убедимся в этом. Найдем пересечение двух прямых, т.е. решим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + C_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Если определитель системы (4)  $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , то прямые параллельны, а их коэффициенты пропорциональны, т.е.  $a_1x + b_1y + C_1 = k(a_2x + b_2y + C_2)$ .

Введем замену  $z = a_1x + b_1y$ . Тогда  $y' = \frac{1}{b_1} \frac{dz}{dx} - \frac{a_1}{b_1} = f\left(\frac{z + C_1}{kz + C_2}\right)$ . Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Если  $\Delta \neq 0$ , то прямые пересекаются в точке  $(x_0, y_0)$ . Их уравнения можно записать иначе:

$$a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) = 0, \quad a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) = 0.$$

Введем замену  $y - y_0 = u$ ,  $x - x_0 = v$ . Тогда  $dy = du$ ,  $dx = dv$ ,  $y' = \frac{du}{dv}$  и уравнение (3) станет однородным

$$\frac{du}{dv} = f\left(\frac{a_1 v + b_1 u}{a_2 v + b_2 u}\right).$$

Упражнение. Убедиться, что уравнение  $y' = x^{\alpha-1} f\left(\frac{y}{x^\alpha}\right)$  подстановкой  $y = x^\alpha z$  приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

#### **§ 4. Линейное уравнение первого порядка. Уравнение Бернулли**

Уравнение вида

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (1)$$

называется *линейным неоднородным уравнением*.

Уравнение вида

$$y' = a(x)y \quad (2)$$

называется *линейным однородным уравнением*.

Линейное однородное уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными и поэтому интегрируется в квадратурах. Его общим решением является

$$y = C \cdot e^{\int a(x) dx} \quad (3)$$

Решение неоднородного линейного уравнения (1) будем искать в виде (3), только параметр  $C$  будем считать функцией переменной  $x$ , т.е.

$$y = C(x) \cdot e^{\int a(x) dx} \quad (4)$$

Этот метод решения называется *методом вариации постоянной*. Подставляя (4) в (1), получим

$$\frac{dC}{dx} e^{\int a(x) dx} + a(x) C(x) \cdot e^{\int a(x) dx} = a(x) C(x) \cdot e^{\int a(x) dx} + b(x),$$

$$\frac{dC}{dx} = b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx}, \quad C(x) = \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx + C_1 \quad (5)$$

Подставляя (5) в (4), найдем общее решение неоднородного линейного уравнения (1)

$$y = \left( \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx + C_1 \right) e^{\int a(x) dx}. \quad (6)$$

Как видно, уравнение (1) всегда разрешимо в квадратурах. Уравнение (1) можно решить другим методом, – методом Бернулли, когда решение ищется в виде произведения двух неизвестных функций

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1), получим

$$y' = u'v + uv' = auv + b, \quad u(v' - av) + u'v = b \quad (8)$$

Положим  $v' - av = 0$ , тогда  $v(x) = e^{\int a(x) dx}$ . (9)

С учетом (9) из (8) найдем

$$\frac{du}{dx} = b(x) \cdot e^{-\int a(x) dx}, \quad u(x) = \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx + C_1 \quad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (7), получим опять формулу (6).

Уравнение вида

$$y' = a(x)y + y^\alpha b(x), \quad \alpha \in R \quad (11)$$

называется уравнением Бернулли. Можно убедиться, что подстановкой  $z = y^{1-\alpha}$  оно сводится к линейному неоднородному уравнению (1). Решать уравнение (11) можно методом Бернулли, не сводя его к линейному.

**Пример.** Решить уравнение  $y' = \frac{2y}{6x - y^2}$ .

**Решение.** Данное уравнение не является линейным, но если его переписать в виде  $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{y}x - \frac{1}{2}y$ , то оно станет линейным относительно функции  $x = x(y)$ . Пусть

$$x = u(y) \cdot v(y) \quad \text{Тогда} \quad x'_y = u'v + uv' = \frac{3}{y}uv - \frac{1}{2}y,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{3}{y}v\right) = -\frac{1}{2}y. \quad \text{Положим } v' - \frac{3}{y}v = 0, \text{ тогда}$$

$$v(y) = y^3, \quad u'v = -\frac{1}{2}y \quad \text{Решая последнее уравнение,}$$

$$\text{найдем } u(y) = \frac{1}{2y} + C. \quad \text{Общее решение данного уравнения}$$

$$\text{запишется в виде } x = uv = \left(\frac{1}{2y} + C\right)y^3.$$

## § 5. Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение первого порядка вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$ , т.е. если  $Pdx + Qdy = u'_x dx + u'_y dy = du$ . Уравнение (1) тогда можно записать как

$$du = 0. \quad \text{Его общее решение} - u(x, y) = C.$$

**Пример 1.**  $x dx + y dy = 0, \Rightarrow d(xy) = 0, xy = C$  -- общее решение данного уравнения. Это семейство гипербол.

**Теорема.** Пусть функции  $P(x, y), Q(x, y)$  непрерывно дифференцируемые в односвязной области  $D$ . Для того, чтобы уравнение (1) было уравнением в полных

дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2)$$

**Доказательство.** Пусть левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом дважды непрерывно дифференцируемой функции  $u(x, y)$ , т.е.  $P = u'_x$ ,  $Q = u'_y$ .

Тогда  $\frac{\partial P}{\partial y} = u''_{xy}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = u''_{yx}$ . Поскольку  $u''_{xy} = u''_{yx}$ , то условие (2) выполняется и необходимость доказана.

Докажем теперь достаточность, т.е. предполагая (2) выполненным, найдем функцию  $u(x, y)$ , полный дифференциал которой совпадает с левой частью уравнения (1). Допустим, что такая функция существует,

тогда  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ . Интегрируя это равенство, получим

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + C(y). \quad (3)$$

Предполагая возможным дифференцирование по параметру  $y$  под знаком интеграла, из (3) получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx + \frac{dC}{dy}. \quad (4)$$

Используя (2), вычислим интеграл в (4).

$$\begin{aligned} u'_y &= \int_{x_0}^x \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx + \frac{dC}{dy} = Q(x, y) \Big|_{x_0}^x + \frac{dC}{dy} = \\ &= Q(x, y) - Q(x_0, y) + \frac{dC}{dy}. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая, что  $u'_y = Q(x, y)$ , равенство (5) запишем так:

$$\frac{dC}{dy} = Q(x_0, y).$$

Интегрируя последнее равенство, найдем

$$C(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), найдем искомую функцию

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy. \quad (7)$$

Теорема доказана.

**Пример 2.** Решить уравнение  $e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0$ .

**Решение.** Условия теоремы выполняются на всей плоскости, поэтому воспользуемся формулой (7), полагая  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Тогда

$$u(x, y) = \int_0^x e^y dx + \int_0^y (-2y) dy = xe^y - y^2.$$

Общим решением данного уравнения будет  $xe^y - y^2 = C$ .

## § 6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Методы понижения порядка

Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка, разрешенное относительно высшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1)$$

Задача нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_{10}, y'(x_0) = y_{20}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}, \quad (2)$$

называется задачей Коши.

Функция  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , зависящая от  $n$  параметров  $C_k$  и удовлетворяющая уравнению (1), называется его общим решением, если можно подобрать параметры  $C_k$  так, чтобы функция  $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  удовлетворяла произвольным начальным условиям (2). Решение, полученное из общего при фиксированных параметрах, называется частным.

**Теорема (существования и единственности).** Уравнение (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (2), если функция  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  и ее частные производные по переменным  $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  непрерывны в некоторой  $(n+1)$ -мерной области  $D$ , содержащей точку  $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$  (без доказательства).

Рассмотрим некоторые типы уравнений  $n$ -го порядка, порядок которых можно понизить.

1.  $y^{(n)} = f(x)$ . Это уравнение всегда разрешимо в квадратурах. Поскольку  $y^{(n)} = \frac{d}{dx}(y^{(n-1)}(x))$ , то  $d(y^{(n-1)}(x)) = f(x) dx$  и  $y^{(n-1)}(x) = \int f(x) dx + C_1$ . Как видно, порядок уравнения понижен на единицу. Аналогично найдем  $y^{(n-2)}(x) = \int dx \int f(x) dx + C_1 x + C_2$ . Окончательный результат запишем так:

$$y = \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots + C_n.$$

**Пример 1.** Решить задачу Коши:  $y'' = xe^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .



**Решение.**  $y' = \int x e^x dx + C_1 = (x-1) e^x + C_1, \quad (3)$

$$y = (x-2) e^x + C_1 x + C_2. \quad (4)$$

Подставляя начальные условия в (3) и (4), получим систему

$$\begin{cases} -1 + C_1 = 0, \\ -2 + C_2 = 1. \end{cases}$$

Решая ее, найдем  $C_1 = 1, C_2 = 3$ . Тогда  $y = (x-2) e^x + x + 3$  – искомое решение задачи Коши.

2.  $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ . Уравнение не содержит неизвестной функции и, быть может, первых нескольких ее производных. Это уравнение допускает понижение порядка на  $k$  единиц. Действительно, введем замену  $p = y^{(k)}$ . Тогда  $p' = y^{(k+1)}, p'' = y^{(k+2)}, \dots, p^{(n-k)} = y^{(n)}$ . Уравнение примет вид  $F(x, p', p'', \dots, p^{(n-k)}) = 0$ . Его порядок на  $k$  единиц меньше порядка данного уравнения.

**Пример 2.** Найти общее решение уравнения  $y''' - \frac{1}{x} y'' = 0$ .

**Решение.**  $y'' = p, \frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = 0, \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, p = C_1 x$  или

$y'' = C_1 x$ . Получили уравнение первого типа. После двукратного интегрирования получим общее решение данного уравнения:  $y = \frac{1}{6} C_1 x^3 + C_2 x + C_3$ .

3.  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  Уравнение не содержит явно независимой переменной  $x$ . Это уравнение допускает понижение порядка на единицу. Действительно, введем замену  $y' = p$ . Тогда  $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ .

Аналогично найдем все последующие производные.

Ясно, что  $n$ -ая производная по  $x$  выразится через  $(n-1)$ -ю производную по  $y$ , а уравнение понизит свой порядок на единицу.

**Пример 3.** Найти общее решение уравнения

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0.$$

**Решение.** Подставим в уравнение вместо  $y'$  и  $y''$   $p$  и

$$p \frac{dp}{dy}, \text{ получим } y \cdot p \frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0 - \text{уравнение с}$$

разделяющимися переменными. После интегрирования

$$\text{найдем } p = \frac{\sqrt{C_1^2 - y^2}}{y} \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{C_1^2 - y^2}}{y}. \text{ Получили}$$

опять уравнение с разделяющимися переменными. Общее

$$\text{решение имеет вид: } (x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2.$$

4.  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ . Здесь функция  $F$  является

однородной функцией относительно  $y, y', \dots, y^{(n)}$ , т.е.

$$F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}), \quad (5)$$

$m$  — степень однородности,  $t > 0$ . Это уравнение допускает понижение порядка на единицу. Действительно,

$$\text{введем замену } y' = yz. \text{ Тогда } y'' = y'z + yz' =$$

$$= y(z^2 + z'). \text{ Аналогично найдем все последующие}$$

производные. Ясно, что  $y^{(n)}$  выразится через производные функции  $z$ , порядок которых не превзойдет  $(n-1)$ ,

умноженные на  $y$ . Поскольку функция  $F$  однородная, то  $y$  можно вынести за знак функции. В результате получим

$$\Phi(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

**Пример 4.** Решить уравнение  $x^2 y y'' = (y - xy')^2$ .

**Решение.** Равенство (5) выполняется при  $m = 2$ . Подставим  $y' = yz$ ,  $y'' = y(z^2 + z')$  в уравнение и, сокращая на  $y^2$ , получим  $x^2(z^2 + z') = (1 - xz)^2$  или

$z' = -\frac{2}{x}z + \frac{1}{x^2}$  — линейное уравнение. Его решением является  $z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$ . Поскольку  $z = \frac{y'}{y}$ , то получим

уравнение с разделяющимися переменными  $\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}\right)dx$ . Общее решение данного уравнения имеет

вид:  $y = C_2 x \exp\left(-\frac{C_1}{x}\right)$ .

## § 7. Система дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

можно свести к системе  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка. Действительно, введем новые функции

$$y_1(x) = y, \quad y_2(x) = y', \quad y_3(x) = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}. \quad (2)$$

Дифференцируя функции (2) и используя (1), получим следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (3)$$

Решением системы (3) является некоторый вектор

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Отсюда ясно, что уравнение (1) и система (3) эквивалентны, т.е. всякое решение системы (3) является решением уравнения (1) и наоборот. При этом, если решение уравнения (1) удовлетворяет начальным условиям

$$y(x_0) = y_{10}, y'(x_0) = y_{20}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}, \quad (4)$$

то решение системы (3) удовлетворяет начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} \quad (5)$$

Если мы имеем не одно уравнение (1), а несколько таких уравнений разных порядков, то их также можно свести к системе уравнений первого порядка

Общий вид такой системы следующий

$$\frac{dy_k}{dx} = \varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Число уравнений системы совпадает с числом неизвестных функций. Система (6) называется системой первого порядка в нормальной форме, или нормальной системой.

Если ввести векторы  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ ,  $\vec{y}_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ , то систему (6) и начальные условия

$$(5) \text{ можно записать короче } \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{\varphi}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

Задача нахождения решения системы (6), удовлетворяющего начальным условиям (5), называется задачей Коши.

**Теорема.** Если функции  $\varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ , непрерывные вместе со своими частными производными по переменным  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , в некоторой  $(n+1)$ -мерной области  $D$ , содержащей точку  $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ , то задача Коши имеет единственное решение (без доказательства).

Существуют две интерпретации решения системы (6). Решение системы интерпретируют с одной стороны как кривую в  $(n+1)$ -мерном пространстве. Эту кривую называют интегральной кривой. Она проходит через точку  $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ . С другой стороны, считая независимую переменную  $x$  параметром (обычно ее обозначают через  $t$  и считают временем), решение  $y_1 = y_1(t)$ ,  $y_2 = y_2(t)$ , ...,  $y_n = y_n(t)$  системы интерпретируют как кривую, заданную в параметрическом виде. Она лежит уже в  $n$ -мерном пространстве, которое называют *фазовым пространством*. Кривую называют *фазовой траекторией* движения точки. С изменением времени  $t$  точка движется по траектории и в момент времени  $t_0$  находится в точке  $(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ .

Для общей нелинейной системы (6) нет общих методов решения, если не считать приближенных. Поэтому для каждой системы ищут свой метод решения. Некоторые системы можно решить методом интегрируемых комбинаций. Решение в этом случае чаще всего записывают в виде совокупности некоторых поверхностей  $\varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_k$  в  $(n+1)$ -мерном пространстве. Эти поверхности называют первыми интегралами.

Перепишем систему (6) в симметричном виде

$$\frac{dy_1}{\varphi_1} = \frac{dy_2}{\varphi_2} = \dots = \frac{dy_n}{\varphi_n} = \frac{dx}{1} \quad (6')$$

Используя свойство пропорции, из (6') получим

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i dy_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i} = dx \text{ или } \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i dy_i + \alpha_{n+1} dx}{\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i + \alpha_{n+1}} = \text{const.} \quad (7)$$

Если удастся подобрать коэффициенты  $\alpha_i$ , так, чтобы числитель (7) был полным дифференциалом знаменателя или, чтобы знаменатель обратился в нуль, то после интегрирования получим первый интеграл. Если найдем  $n$  независимых первых интегралов, то найдем общее решение системы.

**Пример.** Решить систему  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-z}{z-y}$ ,  $\frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{z-y}$ .

**Решение.** Запишем систему в симметрическом виде

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} \quad \text{Складывая числители и}$$

знаменатели, получим  $\frac{d(x+y+z)}{0} \Rightarrow d(x+y+z) = 0 \Rightarrow$

$x+y+z = C_1$  – первый интеграл. Умножая числитель и знаменатель первой дроби на  $2x$ , второй – на  $2y$ , третий –

$2z$  и складывая результаты, получим  $\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0} \Rightarrow$

$d(x^2+y^2+z^2) = 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = C_2$  – еще один первый интеграл.

Система  $\begin{cases} x+y+z = C_1 \\ x^2+y^2+z^2 = C_2 \end{cases}$ , есть общее решение данной

системы. Геометрически это линии пересечения сфер и плоскостей в  $R_3$ .

## § 8. Линейная однородная система. Структура общего решения

Рассмотрим частный случай нормальной системы (6) §7, когда функции  $\varphi_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  являются линейными относительно неизвестных функций  $y_k$ . Общий вид нормальной линейной неоднородной системы следующий:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x), \\ \dots, \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x). \end{cases} \quad (1)$$

В более компактном виде систему (1) можно записать так:

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + g_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1')$$

Если ввести функциональные матрицы

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$\vec{g}(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \dots \\ g_n(x) \end{pmatrix},$$

то систему (1) можно записать в матричном виде

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{g}(x). \quad (2)$$

Если  $\vec{g}(x) = 0$ , то система (2) называется нормальной линейной однородной. Ее общий вид следующий:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x) \vec{y}. \quad (3)$$

Из теоремы существования и единственности §7 следует, что если элементы матрицы системы  $a_{ij}(x)$  и свободные члены  $g_i(x)$  непрерывны на некотором интервале  $(a, b)$ , то на нем существует единственное решение задачи Коши, удовлетворяющее начальным условиям  $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0} \quad \forall x_0 \in (a, b)$ . В дальнейшем будем считать функции  $a_{ij}(x)$  и  $g_i(x)$  непрерывными.

Однородная система (3) имеет тривиальное решение, играющее роль нуля в пространстве решений. Кроме тривиального система (3) имеет и нетривиальные, что гарантируется теоремой существования и единственности. Покажем, что пространство решений однородной системы (3) является линейным. Для этого достаточно убедиться, что линейная комбинация двух произвольных решений  $\vec{y}^1$  и  $\vec{y}^2$  является решением. Убедимся, что  $\vec{y}^3 = \alpha \vec{y}^1 + \beta \vec{y}^2$

$$\begin{aligned} \text{является решением. Действительно, } \frac{d\vec{y}^3}{dx} &= \frac{d(\alpha \vec{y}^1 + \beta \vec{y}^2)}{dx} = \\ &= \alpha \frac{d\vec{y}^1}{dx} + \beta \frac{d\vec{y}^2}{dx} = \alpha A(x) \vec{y}^1 + \beta A(x) \vec{y}^2 = \\ &= A(x) (\alpha \vec{y}^1 + \beta \vec{y}^2) = A(x) \vec{y}^3. \text{ Итак, } \frac{d\vec{y}^3}{dx} = A(x) \vec{y}^3. \end{aligned}$$

Это означает, что  $\vec{y}^3$  решение, а пространство решений линейное. Позже мы убедимся, что оно  $n$ -мерное.

Выберем  $n$  различных решений системы (3)



$$\bar{y}^1 = \begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ \dots \\ y_n^1 \end{pmatrix}, \bar{y}^2 = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ \dots \\ y_n^2 \end{pmatrix}, \dots, \bar{y}^n = \begin{pmatrix} y_1^n \\ y_2^n \\ \dots \\ y_n^n \end{pmatrix}.$$

Матрица порядка  $n$ , составленная из этих решений

$$w(x) = (\bar{y}^1 \bar{y}^2 \dots \bar{y}^n) = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^1 & y_n^2 & \dots & y_n^n \end{pmatrix}, \quad (4)$$

называется интегральной матрицей, а ее определитель  $\det w(x) = |w(x)|$  называется определителем Вронского.

По правилу дифференцирования определителя (см. (7) §8 гл.7) найдем

$$\frac{d|w|}{dx} = \sum_{i=1}^n |w_i|, \text{ где } |w_i| = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dy_i^1}{dx} & \frac{dy_i^2}{dx} & \dots & \frac{dy_i^n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^1 & y_n^2 & \dots & y_n^n \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Т.к.  $\bar{y}^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) – решения системы (3), то

$$\frac{dy_i^k}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_j^k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Учитывая (6) и свойства определителей, из (5) получим

$$|w_i| = a_{iy}(x) \det w(x).$$

$$\text{Тогда } \frac{d|w|}{dx} = \sum_{i=1}^n |w_i| = |w| \cdot \text{Sp} A, \quad (7)$$

где  $\text{Sp} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}(x)$  – след матрицы  $A(x)$ .

Интегрируя (7), получим

$$|w| = C \exp\left(\int_{x_0}^x SpA(x)dx\right). \quad (8)$$

Поскольку  $\exp\left(\int_{x_0}^x SpA(x)dx\right)$  в нуль не обращается, то из (8)

следует, что определитель Вронского либо тождественно равен нулю (если  $C = 0$ ), либо отличен от нуля  $\forall x \in (a, b)$ .

**Теорема 1.** Если определитель Вронского отличен от нуля, то система решений  $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^n)$  линейно независимая.

**Доказательство** (от противного). Пусть система решений  $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^n)$  линейно зависима, т.е.

$$C_1\bar{y}^1 + C_2\bar{y}^2 + \dots + C_n\bar{y}^n = w(x) \cdot \vec{C} = 0, \quad (9)$$

где  $\vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$  и есть  $C_i \neq 0$ .

Определителем СЛАУ (9) является определитель Вронского  $\det w(x) \neq 0$ . Поэтому СЛАУ (9) имеет только тривиальное решение  $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ , что противоречит предположению  $\vec{C} \neq 0$ . Теорема доказана.

Справедливо и обратное утверждение, если система решений  $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^n)$  линейно независимая, то определитель Вронского отличен от нуля.

Если  $\det w(x) \neq 0$ , то матрица  $w(x)$  называется фундаментальной, а система решений  $(\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^n)$  — фундаментальной совокупностью решений системы (3).

**Теорема 2.** Решение  $\bar{y}(x) = w(x) \vec{C} = \sum_{i=1}^n C_i \bar{y}^i$ , (10)

где  $C_i$  – произвольные постоянные, является общим решением однородной системы (3), если матрица  $w(x)$  фундаментальная.

**Доказательство.** Чтобы доказать теорему, достаточно убедиться, что выбором  $\vec{C}$  можно удовлетворить произвольным начальным условиям, т.е. что уравнение  $\vec{y}(x_0) = w(x_0) \vec{C}$  имеет решение относительно  $\vec{C} \forall x_0 \in (a, b)$ . Это действительно так, поскольку  $\det w(x_0) \neq 0$ , поэтому  $w^{-1}(x_0)$  существует. Тогда  $\vec{C} = w^{-1}(x_0) x_0$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Фундаментальная система решений  $(\vec{y}^1, \vec{y}^2, \dots, \vec{y}^n)$  образует базис в  $n$ -мерном пространстве решений, а равенство (10) есть разложение общего решения по этому базису.

Таким образом, чтобы найти общее решение однородной линейной системы (3), следует найти  $n$  линейно независимых решений и составить их линейную комбинацию.

## **§ 9. Неоднородная линейная система.** **Структура решения**

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x) \vec{y} + \vec{g}(x). \quad (1)$$

Решение неоднородной системы (1) будем искать методом вариации постоянной, т.е. ее решение запишем в том же виде, что и решение соответствующей однородной системы (см. (10) §8), только постоянный вектор  $\vec{C}$  будем считать неизвестной функцией переменной  $x$ .

$$\vec{y}(x) = w(x) \vec{C}(x). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\frac{dw}{dx} \vec{C}(x) + w \frac{d\vec{C}(x)}{dx} = A(x) w(x) \vec{C}(x) + \vec{g}(x). \quad (3)$$

Поскольку фундаментальная матрица  $w(x)$  удовлетворяет однородной системе, т.е.  $\frac{dw}{dx} = Aw$ , то из (3) следует

$$w \frac{d\vec{C}}{dx} = \vec{g}. \quad (4)$$

Разделяя переменные в (4) и интегрируя, найдем

$$\vec{C}(x) = \int_{x_0}^x w^{-1}(t) \vec{g}(t) dt + \vec{C}_0. \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получим общее решение неоднородной системы (1)

$$\vec{y}(x) = w(x) \vec{C}_0 + w(x) \int_{x_0}^x w^{-1}(t) \vec{g}(t) dt. \quad (6)$$

При  $\vec{C}_0 = 0$  из (6) получим частное решение неоднородной системы (1)

$$\vec{y}_*(x) = w(x) \int_{x_0}^x w^{-1}(t) \vec{g}(t) dt. \quad (7)$$

Первое слагаемое в (6) является общим решением соответствующей однородной системы. Таким образом, общее решение неоднородной линейной системы состоит из суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной. Заметим, что структура решений однородной и неоднородной линейных систем аналогичны структурам решений СЛАУ.

## § 10. Линейная система с постоянными коэффициентами

Рассмотрим частный случай линейной системы дифференциальных уравнений, когда элементы  $a_{ij}$  матрицы системы являются числами. Решим сначала однородную систему

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A \vec{y}. \quad (1)$$

Легко проверить, что матрица  $w(x) = e^{x^4}$  является интегральной, т.е. является решением системы (1).

Действительно,  $\frac{dw}{dx} = A e^{x^4} = A w$ . Докажем, что она является и фундаментальной. Для этого достаточно убедиться, что определитель Вронского  $\det w = |w| \neq 0$ , т.е. что матрица  $w(x) = e^{x^4}$  невырожденная. Используя свойства матричной экспоненты и теорему об определителе произведения матриц, найдем

$$e^{x^4} \cdot e^{-x^4} = E, \quad \det e^{x^4} \cdot \det e^{-x^4} = 1.$$

Из последнего равенства ясно, что  $\det w \neq 0$  и, следовательно, матрица  $w(x) = e^{x^4}$  фундаментальная.

Поэтому общее решение системы (1) имеет вид

$$\vec{y}(x) = e^{x^4} \vec{C}. \quad (2)$$

**Пример 1.** Решить систему 
$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x + 4y, \\ \dot{z} = -2x + y + 2z. \end{cases}$$

**Решение.** Запишем систему в матричном виде

$$\frac{d\vec{y}}{dz} = A \vec{y}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (2) и результат примера 2 §7 гл.7, получим общее решение данной системы:

$$\bar{y}(t) = e^{tA} \bar{C} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-2t & t & 0 \\ -4t & 1+2t & 0 \\ -2t & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{aligned} x &= (C_1(1-2t) + C_2t) e^{2t}, \\ y &= (-4C_1t + C_2(1+2t)) e^{2t}, \\ z &= (-2C_1t + C_2t + C_3) e^{2t}. \end{aligned}$$

Если  $e^{xA} = T e^{xJ} T^{-1}$ , то общее решение (2) можно записать так:  $\bar{y}(x) = T e^{xJ} \bar{C}$ . (2')

Здесь  $J = \begin{pmatrix} J_{n_1} & J_{n_2} & \dots & J_{n_k} \end{pmatrix} = T^{-1} A T$  — матрица жордановой формы, где  $J_{n_i}$  — клетка Жордана, соответствующая собственному числу  $\lambda_i$  кратности  $n_i = m$ , поэтому

$$e^{xJ_{n_i}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i x} & x e^{\lambda_i x} & \dots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_i x} \\ 0 & e^{\lambda_i x} & \dots & \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_i x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i x} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) видно, что общее решение системы (1) представляет собой линейную комбинацию функций вида  $x^k e^{\lambda_i x}$ . При этом клетке Жордана порядка  $m$  отвечает выражение вида

$$(C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots + C_m) e^{\lambda_i x}. \quad (4)$$

Если собственные числа комплексно сопряженные  $\lambda_i = \alpha + i\beta$ ,  $\bar{\lambda}_i = \alpha - i\beta$ , то можно взять действительную и мнимую части (4)

$$\begin{aligned} & (C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots + C_m) e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ & (C_1 x^{m-1} + C_2 x^{m-2} + \dots + C_m) e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned} \quad (5)$$

Для решения неоднородной линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A \vec{y} + \vec{g}(x) \quad (6)$$

воспользуемся формулой (6) §9, в которой вместо  $w(x)$  поставим  $e^{x^d}$ . Тогда общее решение неоднородной системы (6) запишется в виде:

$$\vec{y}(x) = e^{x^d} \vec{C} + \int_{x_0}^x e^{(x-t)A} \vec{g}(t) dt. \quad (7)$$

Решим задачу Коши с начальными условиями

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), найдем  $\vec{y}_0 = e^{x_0^d} \vec{C}$ . Разрешив последнее уравнение относительно  $\vec{C}$  и подставив его значение  $\vec{C} = e^{-x_0^d} \vec{y}_0$  в (7), получим решение задачи Коши

$$\vec{y}(x) = e^{(x-x_0)A} \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x e^{(x-t)A} \vec{g}(t) dt. \quad (9)$$

**Пример 2.** Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x + 4y, \\ \dot{z} = -2x + y + 2z + e^{3t}, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 0.$$

**Решение.** Запишем систему и начальные условия в матричном виде:  $\frac{d\vec{y}}{dt} = A \vec{y} + \vec{g}(t)$ ,  $\vec{y}_0 = (1 \ 2 \ 0)^T$ , матрица  $A$  совпадает с матрицей системы примера 1,  $\vec{g}(t) = (0 \ 0 \ e^{3t})^T$ . Воспользуемся формулой (9), вычислив предварительно

$$e^{(t-t_0)A} \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad e^{(t-\tau)A} \vec{g}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{2t+\tau} \end{pmatrix},$$

$$\int_0^t e^{(t-\tau)A} \vec{g}(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{3t} - e^{2t} \end{pmatrix}, \text{ получим решение задачи Коши}$$

$$x = e^{2t}, \quad y = 2e^{2t}, \quad z = e^{3t} - e^{2t}.$$

### § 11. Линейные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное ОДУ  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y + g(x). \quad (1)$$

Если ввести новые функции

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}, \quad (2)$$

то уравнение (1) будет эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= y_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_n y_1 + a_{n-1} y_2 + \dots + a_1 y_n + g(x) \end{aligned} \quad (3)$$

(см. §7). Если  $y^i$  — некоторое решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), то согласно

$$(2), \quad \vec{y}^i = (y_1^i y_2^i \dots y_n^i)^T = \left( y^i \frac{dy^i}{dx} \dots \frac{d^{n-1} y^i}{dx^{n-1}} \right)^T - \text{решение}$$

однородной системы, соответствующей системе (3). Поэтому функциональную матрицу системы (3) можно записать так:



$$w(x) = \begin{pmatrix} y^1 & y^2 & \dots & y^n \\ \frac{dy^1}{dx} & \frac{dy^2}{dx} & \dots & \frac{dy^n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1}y^1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y^2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}y^n}{dx^{n-1}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Матрица (4) является фундаментальной и для уравнения (1), а ее первая строка является фундаментальной совокупностью решений уравнения (1). Поэтому общее решение однородного уравнения, соответствующего (1), будет

$$y = \sum_{i=1}^n C_i y^i \quad (5)$$

Запишем систему (3) в матричном виде

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = A \bar{y} + \bar{g}(x), \quad (3')$$

где  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ ,

$$\bar{g}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Все, что сказано о решении линейной системы с постоянными коэффициентами, справедливо и для уравнения (1). Однако, найти фундаментальную совокупность решений уравнений (1) можно проще, не используя явно матричную экспоненту  $e^{xA}$ .

Составим характеристическое уравнение матрицы  $A$ .

$$\det(A - \lambda E) = \Delta(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & 0 & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв определитель  $\det(A - \lambda E)$ , получим

$$\Delta(\lambda) = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n - \lambda^n = 0 \text{ или}$$

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n \quad (6)$$

Заметим, что характеристическое уравнение (6) получается из уравнения (1) простой заменой производной неизвестной функции порядка  $k$  на  $\lambda^k$

Если привести матрицу  $A$  к жордановой форме, то порядок каждой клетки Жордана, соответствующей корню  $\lambda_i$  уравнения (6), совпадает с кратностью этого корня. Поэтому корню  $\lambda_i$  кратности  $p$  отвечает  $p$  линейно независимых решений вида  $x^k e^{\lambda_i x}$ ,

$k = 0, 1, 2, \dots, p-1$  (см (4) §10) Взяв  $n$  таких решений, получим фундаментальную совокупность решений

Рассмотрим частные случаи.

1. Все корни  $\lambda_i$  характеристического уравнения (6) действительные разные. Общее решение однородного уравнения, согласно (5), записывается в виде

$$y = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i x} \quad (7)$$

**Пример 1.** Найти общее решение уравнения

$$y''' - 9y' = 0$$

**Решение.**  $\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda = 0$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = -3$

Согласно (7),  $y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-3x}$  - общее решение.

2. Все корни характеристического уравнения действительные, но среди них есть кратные. Общее решение однородного уравнения записывается в виде

$$y = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} C_{ik} x^{k-1} e^{\lambda_i x} \quad (8)$$

Здесь  $n_i$  – кратность корня  $\lambda_i$ ,  $m$  – число различных корней характеристического уравнения,  $\sum_{i=1}^m n_i = n$ .

**Пример 2.** Решить уравнение  $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$ .

**Решение.**  $\Delta(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)^3 = 0$ ,  
 $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$ ,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = e^{-x}$ ,  $y_3 = x e^{-x}$ ,  
 $y_4 = x^2 e^{-x}$  – фундаментальная совокупность решений.  
 Согласно (8),  $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_4 x^2 e^{-x}$  – общее решение.

3. Среди корней характеристического уравнения есть кратные комплексно сопряженные корни  $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ ,  $\bar{\lambda}_i = \alpha_i - i\beta_i$ . Общее решение однородного уравнения, согласно (5) и (5) §10, записывается в виде

$$y = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} (a_{ik} \cos \beta_i x + b_{ik} \sin \beta_i x) x^{k-1} e^{\lambda_i x} \quad (9)$$

Здесь  $n_i$  – кратность корня  $\lambda_i$ ,  $m$  – число различных корней, при этом два комплексно сопряженных корня считаются за один.

**Пример 3.** Решить уравнение  $y''' - 5y'' + 4y' - 15y = 0$ .

**Решение.**  $\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda - 15 = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$ ,  
 $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 1 \pm 2i$ .  $y_1 = e^{3x}$ ,  $y_2 = e^x \cos 2x$ ,  
 $y_3 = e^x \sin 2x$  – фундаментальная совокупность решений.  
 Согласно (9),  $y = C_1 e^{3x} + (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x) e^x$  – общее решение.



$$\begin{cases} C_1' + C_2'e^{3x} + C_3'e^{-3x} = 0, \\ 3C_2'e^{3x} - 3C_3'e^{-3x} = 0, \\ 9C_2'e^{3x} + 9C_3'e^{-3x} = 9x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -x, \\ C_2' = \frac{1}{2}xe^{-3x}, \\ C_3' = \frac{1}{2}xe^{3x}, \end{cases}$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}x^2,$$

$$C_2 = -\frac{1}{18}(3x+1)e^{-3x},$$

$$C_3 = \frac{1}{18}(3x-1)e^{3x}.$$

Частное решение найдем по формуле (10)

$$y_* = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{9}.$$

**Замечание.** Уравнение  $n$ -го порядка можно свести к системе  $n$  уравнений первого порядка, наоборот, систему  $n$  уравнений первого порядка в большинстве случаев можно свести к одному уравнению  $n$ -го порядка. Решив уравнение, мы решим и систему. Этот метод решения системы называется методом исключения.

**Упражнение.** Решить методом исключения систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

## § 12. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами со специальной функцией $g(x)$

Рассмотрим неоднородное ОДУ

$$y^{(n)} = a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_ny + g(x), \quad (1)$$

где  $a_k$  – действительные числа. Его частное решение, как известно, можно всегда найти методом вариации постоянной. Однако, если функция  $g(x)$  имеет специальный вид, то частное решение можно найти проще методом неопределенных коэффициентов. Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть  $g(x) = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^p C_k x^k$ ,  $\alpha, C_k \in R$ . Если  $\alpha$  не совпадает ни с одним из корней  $\lambda$ , характеристического уравнения (этот случай называют нерезонансным), то частное решение ищут в том же виде, каков вид функции  $g(x)$ , т.е.

$$y_* = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^p b_k x^k. \quad (2)$$

Здесь коэффициенты  $b_k$  неизвестные. Подставляя (2) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим СЛАУ, из которой найдем  $b_k$ .

**Пример 1.** Найти частное решение уравнения  $y'' - y = xe^{3x}$

**Решение.** Составим и решим характеристическое уравнение.  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . Так как  $\alpha = 3$  не совпадает ни с одним из корней  $\lambda_{1,2}$ , то это случай не резонансный. Частное решение ищем в виде  $y_* = (ax + b)e^{3x}$ . Подставляя это решение в данное уравнение, получим тождество

$$(6a + 9ax + 9b - ax - b) e^{3x} = xe^{3x}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , найдем  $a = \frac{1}{8}$ ,  $b = -\frac{3}{32}$ ,  $y_* = \left(\frac{1}{8}x - \frac{3}{32}\right)e^{3x}$ .

Если  $\alpha$  совпадает с одним из корней  $\lambda$ , характеристического уравнения кратности  $r$  (этот случай называют резонансным), то частное решение ищут в виде

$$y_* = x^r e^{\alpha x} \sum_{k=0}^p b_k x^k. \quad (3)$$

Неизвестные коэффициенты  $b_k$  находятся аналогично.

**Пример 2.** Найти частное решение уравнения  $y'' - y = xe^{-x}$ .

**Решение.**  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ . Так как

$\alpha = -1 = \lambda_2$ , то это резонансный случай. Частное решение

ищем в виде  $y_* = x(ax + b)e^{-x}$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$

находим аналогично.  $a = b = -\frac{1}{4}$ ,

$$y_* = -\frac{1}{4} (x^2 + x)e^{-x}.$$

2. Пусть  $g(x) = e^{\alpha x} \left( \sum_{k=0}^p C_k x^k \cos \beta x + \sum_{k=0}^q C'_k x^k \sin \beta x \right)$ . Если

$\alpha + \beta i$  не совпадает ни с одним из корней  $\lambda$ , характеристического уравнения (нерезонансный случай), то частное решение ищут в том же виде, каков вид функции  $g(x)$ , т.е.

$$g(x) = e^{\alpha x} \left( \sum_{k=0}^m b_k x^k \cos \beta x + \sum_{k=0}^m b'_k x^k \sin \beta x \right), \quad (4)$$

где  $m = \max(p, q)$ . В случае резонанса, когда  $\alpha + \beta i = \lambda_r$ , а  $\lambda_r$  — корень характеристического уравнения кратности  $r$ , решение ищут в виде

$$y_* = x^r e^{\alpha x} \left( \sum_{k=0}^m b_k x^k \cos \beta x + \sum_{k=0}^m b'_k x^k \sin \beta x \right). \quad (5)$$

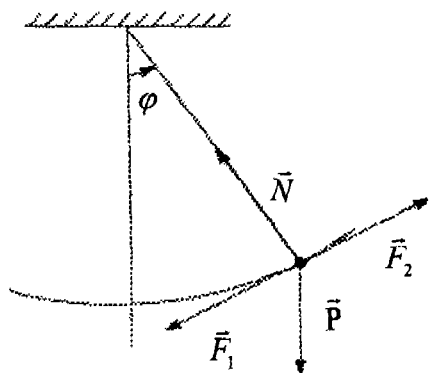
При подстановке (4) или (5) в (1) коэффициенты  $b_k$  приравниваются к коэффициентам при  $x^k \cos \beta x$ ,  $b'_k$  — к коэффициентам при  $x^k \sin \beta x$ .

**Пример 3.** Для уравнения  $y'' - 2y' + 2y = xe^x \sin x$  записать вид частного решения.

**Решение.**  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ . Так как  $\alpha + \beta i = 1 + i = \lambda_1$ , то это резонансный случай. Частное решение имеет вид

$$y_* = x \left( (a_1 x + b_1) \cos x + (a_2 x + b_2) \sin x \right) e^x.$$

### § 13. Колебания математического маятника. Собственные и вынужденные колебания



Под математическим маятником понимают материальную точку, массой  $m$ , подвешенную на нерастяжимой и невесомой нити длиной  $l$ . Пусть на материальную точку помимо веса  $\vec{P}$  и реакции нити  $\vec{N}$  действуют сила

сопротивления среды  $\vec{F}_1 = -\mu \vec{v}$  и вынуждающая сила периодического характера  $\vec{F}_2 = a \vec{\tau} \sin kt$ , где  $\vec{v}$  — скорость движения точки,  $\mu$  — коэффициент сопротивления,  $\vec{\tau}$  — единичный вектор касательной к траектории движения.

Согласно второму закону Ньютона

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{N} - \mu\vec{v} + a\vec{\tau} \sin kt. \quad (1)$$



Известно, что  $|\vec{P}| = mg$ ,  $\vec{v} = \dot{\varphi} l \vec{\tau}$ , где  $\varphi$  – угол отклонения от вертикали. Проектируя (1) на  $\vec{\tau}$ , получим

$$m w_{\tau} = -mg \sin \varphi - \mu \dot{\varphi} l + a \sin kt, \quad (2)$$

где  $w_{\tau} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \ddot{\varphi} l$  – касательное ускорение. С учетом этого (2) перепишем так:

$$\ddot{\varphi} + 2\mu_1 \dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = a_1 \sin kt, \quad (3)$$

$$\text{где } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad 2\mu_1 = \frac{\mu}{ml}, \quad a_1 = \frac{a}{ml}. \quad (4)$$

Уравнение (3) является нелинейным ОДУ второго порядка. Оно не интегрируется в элементарных функциях. Если рассматривать только малые колебания маятника, когда  $\sin \varphi \approx \varphi$ , то из (3) получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

$$\ddot{\varphi} + 2\mu_1 \dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = a_1 \sin kt. \quad (5)$$

Рассмотрим сначала случай, когда на маятник не действует вынуждающая сила. Полагая в (5)  $a_1 = 0$  получим однородное уравнение

$$\ddot{\varphi} + 2\mu_1 \dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (6)$$

Решение однородного уравнения (6) называются собственными колебаниями маятника.

Составим и решим характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu_1 \lambda + \omega^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -\mu_1 \pm \sqrt{\mu_1^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$\varphi = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (8)$$

Если сопротивление среды отсутствует, т.е.  $\mu_1 = 0$ , то  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . Общее решение (8) в этом случае удобнее записать в действительной форме

$$\varphi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (9)$$

$$\text{где } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_1}{C_2}$$

Колебания, определяемые формулой (9), называются гармоническими с амплитудой  $A$  и собственной частотой  $\omega$ . Величина  $\varphi_0$  называется начальной фазой

Если  $\mu_1 < \omega$ , но отлично от нуля, то корни  $\lambda_{1,2} = -\mu_1 \pm \pm i \sqrt{\omega^2 - \mu_1^2} = -\mu_1 \pm i \omega_1$  являются комплексно сопряженными, и общее решение (8) удобнее записать так:

$$\varphi = (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) e^{-\mu_1 t} = A \sin(\omega_1 t + \varphi_0) e^{-\mu_1 t} \quad (10)$$

Как видно, собственные колебания в этом случае являются затухающими (если  $\mu_1 > 0$ ) с частотой  $\omega_1$ .

Если  $\mu_1 > \omega$ , то оба корня  $\lambda_{1,2}$  будут действительными.

Решение (8) уже нельзя назвать колебанием, поскольку  $\varphi \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  монотонно

Если  $\mu_1 = \omega$ , то  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu_1$ . Решение уравнения (6) запишется так.

$$\varphi = (C_1 + C_2 t) e^{-\mu_1 t} \quad (11)$$

Решим теперь неоднородное уравнение (5), полагая в нем  $\mu_1 = 0$ . Общее решение соответствующего однородного дается формулой (9), а частное решение неоднородного найдем методом неопределенных коэффициентов. В нерезонансном случае ( $\lambda_{1,2} = \pm i \omega \neq \pm ik$ ), когда собственная частота  $\omega$  не совпадает с частотой  $k$  вынуждающей силы, общее решение неоднородного уравнения будет следующим

$$\varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{a_1}{\omega^2 - k^2} \sin kt. \quad (12)$$

А в резонансном случае, когда  $\omega = k$ ,

$$\varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{a_1 t}{2\omega} \cos \omega t \quad (13)$$

Как видно из (12), колебания маятника представляют собой сумму двух гармонических колебаний – собственных с частотой  $\omega$  и вынужденных с частотой вынуждающей силы. В резонансном случае амплитуда вынужденных колебаний неограниченно растет с ростом времени  $t$ . Это явление в физике и называют резонансом.

**Упражнение.** Исследовать вынужденные колебания математического маятника, когда  $\mu_1 \neq 0$ .

### § 14. Типы точек покоя

Независимую переменную  $t$  будем впредь считать временем. Систему вида

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{g}(\bar{x}) \quad (1)$$

называют автономной. Ее правая часть не зависит явно от времени  $t$ . Всякое решение системы (1)

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \quad (2)$$

будем интерпретировать как закон движения точки в  $n$ -мерном фазовом пространстве. Закон движения (2) одновременно задает траекторию движения точки, т.е. кривую в фазовом пространстве в параметрическом виде.

Можно доказать, что автономная система (1) может иметь только три вида траекторий. Замкнутую, по которой точка совершает периодическое движение, незамкнутую (движение точки неперiodическое) и траекторию, которая вырождается в точку:  $x_1(t) \equiv x_1^0, x_2(t) \equiv x_2^0, \dots,$

$x_n(t) \equiv x_n^0$ . Эта точка называется точкой покоя системы.

Точки покоя классифицируются в зависимости от того, как себя ведут траектории в их окрестностях. Рассмотрим классификацию точек покоя на примере однородного дифференциального уравнения, описывающего колебания математического маятника

$$\ddot{\varphi} + 2\mu_1\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \quad (3)$$

Введем новые функции  $x_1(t) = \varphi(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ . Тогда уравнение (3) сведется к однородной автономной системе двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - 2\mu_1 x_2. \end{cases} \quad (4)$$

Фазовым пространством для системы (4) будет плоскость  $(x_1, x_2)$ . Система (4) имеет тривиальное решение  $x_1(t) = 0$ ,  $x_2(t) = 0$ . Это тривиальное решение и будет точкой покоя системы (4). Будем считать ее началом декартовой системы координат.

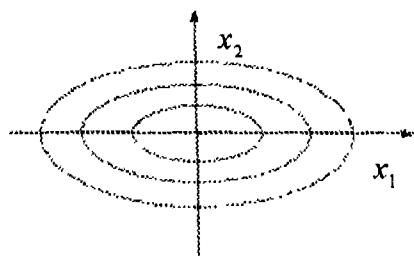
Когда корни характеристического уравнения мнимые  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ , общее решение уравнения (3) имеет вид

$\varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ . При этом общее решение системы (4) запишется так:

$$x_1(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad x_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (5)$$

Исключая параметр  $t$  из (5), получим

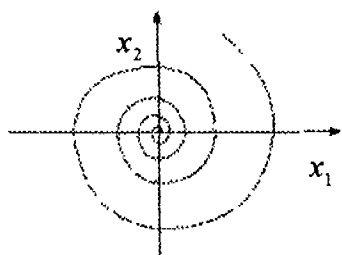
$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{x_2^2}{A^2\omega^2} = 1. \quad (6)$$



Таким образом фазовыми траекториями в этом случае являются эллипсы (6), центры которых в начале координат (в точке покоя). Точка покоя в этом случае называется центром.

Если корни характеристического уравнения комплексные  $\lambda_{1,2} = -\mu_1 \pm i\omega_1$ , то общее решение уравнения (3) дается формулой (10) §13, а общее решение системы (4) запишется в виде

$$\begin{cases} x_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_0) e^{-\mu_1 t}, \\ x_2(t) = A \sqrt{\omega_1^2 + \mu_1^2} \sin(\omega_1 t + \varphi_0 - \varphi_1) e^{-\mu_1 t}, \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega_1}{\mu_1}. \end{cases} \quad (7)$$



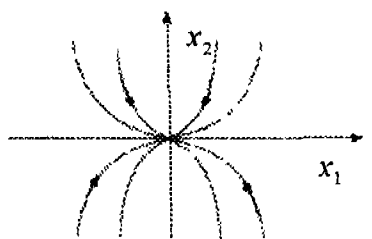
Равенства (7) представляют собой семейство спиралей, бесконечно навивающихся на точку покоя. Такая точка покоя называется фокусом.

Если корни характеристического уравнения действительные разные, то решение уравнения (3) дается формулой (8) §13, а решение системы (4) запишется так:

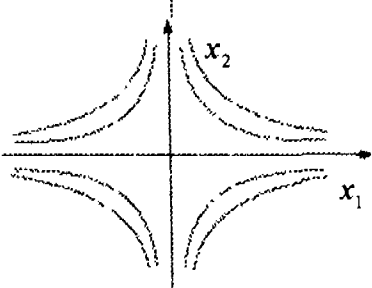
$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ x_2(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (8)$$

Исключая из (8) параметр  $t$ , получим

$$\left( \frac{x_2 - \lambda_2 x_1}{C_1 (\lambda_1 - \lambda_2)} \right)^{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 x_1 - x_2}{C_2 (\lambda_1 - \lambda_2)}. \quad (9)$$



Если  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$ , то кривые семейства (9) представляют собой параболы, проходящие через точку покоя. Точка покоя в этом случае называется узлом.



Если  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$ , то кривые представляют собой гиперболы. Такая точка покоя называется седлом.

Можно убедиться, что в случае равенства корней

характеристического уравнения, точка покоя будет узлом. Результаты этого частного примера справедливы для любой нормальной автономной системы двух уравнений с постоянными коэффициентами. А именно, если корни характеристического уравнения мнимые, то точка покоя является центром, если комплексно сопряженные, – фокусом. Если корни действительные одного знака, то это узел, если разных знаков – седло.

### § 15. Понятие устойчивости по Ляпунову

Рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Решить уравнение  $\ddot{x} = x$ ,  $x(0) = \alpha$ ,  $\dot{x}(0) = \beta$ .

**Решение.**  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ ,  $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$  – общее решение данного уравнения. Из начальных условий найдем  $C_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ,  $C_2 = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$  и запишем решение задачи Коши

$$x(t) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) e^t + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) e^{-t}. \quad (1)$$

Положим в частности  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ , тогда из (2) получим первое частное решение  $x_1(t) = e^{-t}$ . Положив  $\alpha = 1,001$ ,  $\beta = -0,999$ , получим второе частное решение  $x_2(t) = 0,001 e^t + e^{-t}$ . Сравним эти решения при  $t = 10$ .  $x_1(10) = e^{-10} \approx 0,5 \cdot 10^{-4}$ ,  $x_2(10) \approx 20$ . Отношение частных решений при  $t = 10$  будет  $\frac{x_2(10)}{x_1(10)} \approx 4 \cdot 10^5$ . Таким образом изменение начальных условий на 0,001 изменило решение при  $t = 10$  в 400 тыс. раз.

**Пример 2.** Решить уравнение  $\ddot{x} = -x$ ,  $x(0) = \alpha$ ,  $\dot{x}(0) = \beta$ .

**Решение.**  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm i$ ,  $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$  – общее решение. Из начальных условий найдем  $C_1 = \alpha$ ,  $C_2 = \beta$ . Так что  $x(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$  – решение задачи Коши. Так как косинус и синус по модулю не превышают единицы при любых значениях  $t$ , то малые изменения начальных условий  $\alpha$  и  $\beta$  приведут к малым изменениям решения задачи Коши.

**Вывод.** Существуют ОДУ (системы ОДУ), решение которых существенно изменяется при малых изменениях начальных условий, и существуют ОДУ, решения которых меняются незначительно при малых изменениях начальных условий. Решения первых уравнений называются неустойчивыми, а решения вторых – устойчивыми. Уточним понятие устойчивости решения системы

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{g}(t, \bar{x}) \quad (2)$$

с начальными условиями  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ . Пусть  $\bar{x}^0(t)$  – некоторое решение системы (2) и пусть  $\bar{x}(t)$  – любое другое решение этой же системы.

**Опр.1.** Решение  $\bar{x}^0(t)$  системы (2) называется устойчивым по Ляпунову, если для всякого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta_\varepsilon > 0$  такое, что из неравенства  $|\bar{x}(t_0) - \bar{x}^0(t_0)| < \delta_\varepsilon$  следует неравенство  $|\bar{x}(t) - \bar{x}^0(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ .

Другими словами, решение  $\bar{x}^0(t)$  устойчиво, если близкие к нему по начальным условиям решения, остаются близкими для всех  $t \geq t_0$ .

**Опр.2.** Устойчивое по Ляпунову решение  $\bar{x}^0(t)$  системы (2) называется асимптотически устойчивым, если  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - \bar{x}^0(t)| = 0$ .

Рассмотрим теперь однородную линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A \vec{x}. \quad (3)$$

Система (3) имеет тривиальное (нулевое) решение  $\vec{x}^0(t) \equiv 0$  (точка покоя) и бесконечное множество нетривиальных решений.

**Опр.3.** Точка покоя системы (3) называется устойчивой, если для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta_\varepsilon > 0$  такое, что из неравенства  $|\vec{x}(t_0)| < \delta_\varepsilon$  следует неравенство  $|\vec{x}(t)| < \varepsilon \forall t \geq t_0$ . Здесь  $\vec{x}(t)$  – любое нетривиальное решение системы (3).

Обратимся к примерам предыдущего параграфа. Очевидно, центр – устойчивая точка покоя, но не является асимптотически устойчивой. Фокус может быть как устойчивой, так и неустойчивой точкой покоя. Если  $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ , то точка движется по спирали к точке покоя. В этом случае фокус будет асимптотически устойчивой точкой покоя. Если  $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$  или  $\operatorname{Re}(\lambda_2) > 0$ , то точка движется по спирали от точки покоя, поэтому фокус будет неустойчивой точкой покоя. Узел также может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Седло всегда является неустойчивой точкой покоя.

Можно доказать, что решение линейной системы с постоянными коэффициентами будет асимптотически устойчивым, только в том случае, когда реальные части собственных чисел матрицы системы будут отрицательными. Если хотя бы одно из собственных чисел имеет положительную реальную часть, то решение будет неустойчивым. Если имеются чисто мнимые собственные числа, то решение может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Этот случай требует особого исследования.



**Пример.** Исследовать устойчивость системы 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

**Решение.**  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$ . Так как оба корня отрицательные, то точка покоя является устойчивым узлом. Все решения данной системы устойчивы.

## § 16. Понятие о краевых задачах ОДУ

Наряду с задачей Коши, т.е. задачей с начальными условиями, рассматривается и так называемая краевая (граничная) задача. В этой задаче решение ОДУ ищется на отрезке  $[a, b]$  при некоторых дополнительных условиях на концах отрезка.

Если задача Коши при определенных требованиях имеет всегда единственное решение, то граничная задача при тех же требованиях может не иметь решения или иметь бесконечное множество решений.

Для примера рассмотрим граничные задачи для линейного уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = g(x). \quad (1)$$

Для уравнения (1) различают граничные задачи первого, второго и третьего рода. Соответствующие граничные условия записываются так:

$$y(a) = \alpha_1, \quad y(b) = \alpha_2; \quad (2)$$

$$y'(a) = \alpha_1, \quad y'(b) = \alpha_2; \quad (3)$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y'(a) = \alpha_1, \quad \beta_3 y(b) + \beta_4 y'(b) = \alpha_2. \quad (4)$$

Граничная задача легко решается, если известно общее решение уравнения (1)

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_*(x). \quad (5)$$

Используя одно из граничных условий (2–4), найдем  $C_1$ ,  $C_2$  и тем самым решим граничную задачу. Воспользуемся,

например, граничными условиями (2). Тогда получим следующую систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) = \alpha_1 - y_*(a), \\ C_1 y_1(b) + C_2 y_2(b) = \alpha_2 - y_*(b). \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) имеет единственное решение, если ее определитель отличен от нуля. Если определитель равен нулю, то она не имеет решения или имеет бесконечное множество решений.

**Пример.** Решить граничную задачу:  $y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(b) = y_1$ .

**Решение.**  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm i$ ,  $y(t) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  – общее решение данного уравнения. Из граничных условий получим систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin b = y_1. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = \frac{y_1}{\sin b}, \text{ если } b \neq \pi k.$$

Итак, если  $b \neq \pi k$ , то получим единственное решение граничной задачи  $y = \frac{y_1}{\sin b} \sin x$ .

Если  $b = \pi k$ ,  $y_1 \neq 0$ , то граничная задача не имеет решения. Если  $b = \pi k$ ,  $y_1 = 0$ , то граничная задача имеет бесконечное множество решений  $y = C_2 \sin x$ .

## § 17. Решение ОДУ с помощью степенных рядов

Рассмотрим линейное ОДУ с переменными коэффициентами

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0. \quad (1)$$

**Теорема.** Если коэффициенты уравнения (1) в окрестности точки  $x_0$  разлагаются в степенные ряды, то по крайней мере одно из двух линейно независимых решений уравнения (1) можно представить в окрестности точки  $x_0$  в

виде степенного или обобщенного степенного ряда (без доказательства).

Обобщенным степенным рядом называется ряд вида

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (2)$$

в частном случае, когда  $\nu = 0$ , т.е. найдем частное решение уравнения

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (4)$$

Согласно теореме, будем искать решение уравнения (3) в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (5)$$

Из начальных условий (4) найдем  $a_0 = 1, a_1 = 0$ .

Дифференцируя дважды ряд (5), получим

$$y' = \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Подставим найденные производные и (5) в уравнение (3).

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}) x^n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рекуррентное соотношение (6) позволяет найти все коэффициенты ряда (5). Поскольку  $a_1 = 0$ , то из (6) следует, что все нечетные коэффициенты обращаются в

нуль Найдем четные  $a_0 = 1$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2^2}$ ,  $a_4 = \frac{1}{2^6} =$   
 $= \frac{1}{(2!)^2 \cdot 2^4}$ ,  $a_6 = -\frac{1}{(2!)^2 \cdot 2^4 \cdot 6^2} = \frac{1}{(3!)^2 \cdot 2^6}$ ,  $\dots$ ,  $a_{2k} =$   
 $= (-1)^k \frac{1}{(k!)^2 2^{2k}}$ .

С учетом найденных коэффициентов ряд (5) запишем так:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}. \quad (7)$$

Функцию (7), решение уравнения Бесселя, называют функцией Бесселя нулевого порядка и обозначают  $J_0(x)$ . Аналогично, но в виде обобщенного степенного ряда, можно получить решение уравнения Бесселя (2) при  $\nu = n$ . Эти решения называют функциями Бесселя  $n$ -го порядка

$$J_n(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!(n+1)(n+2)\dots(n+k)}. \quad (8)$$

## § 18. Приближенные методы решения ОДУ

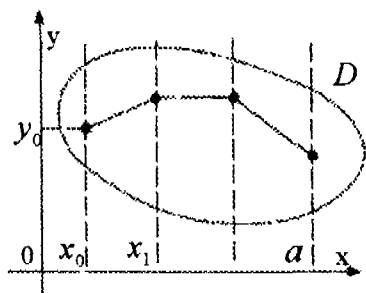
Поскольку только узкий класс ОДУ разрешим в квадратурах, то большую роль играют приближенные и в первую очередь численные методы решения ОДУ.

Рассмотрим уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Геометрический смысл производной – угловой коэффициент касательной к кривой. Поэтому уравнение (1) в каждой точке  $(x, y) \in D$ , где  $D$  – область определения функции  $f(x, y)$ , задает направление касательной к

интегральной кривой. Если в каждой малой окрестности точки  $(x, y) \in D$  интегральную кривую изобразить отрезком ее касательной, то получим поле направлений. Анализируя это поле направлений, можно получить



качественное представление о поведении интегральных кривых.

Чтобы получить количественный результат решения уравнения (1), можно воспользоваться, например, методом Эйлера. Найдем

методом Эйлера решение уравнения (1) на отрезке  $[x_0, a]$ , удовлетворяющее начальному условию  $y_0 = y(x_0)$ . Для этого разобьем отрезок  $[x_0, a]$  на  $m$  частей точками

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = a.$$

Это разбиение называют сеткой. Проведем через точки  $x_n$  прямые, параллельные оси  $y$  и тем самым разобьем область  $D$  на  $m$  частей. В точке  $(x_0, y_0)$  найдем  $y' = f(x_0, y_0)$  и заменим интегральную кривую на отрезке  $[x_0, x_1]$  отрезком ее касательной в точке  $(x_0, y_0)$ . Пересечение этой касательной с прямой  $x = x_1$  дает точку  $(x_1, y_1)$ . Продолжая этот процесс, мы вместо интегральной кривой получим некоторую ломаную линию, проходящую через точки  $(x_n, y_n)$ , которые называют узлами сетки.

Можно доказать, что в пределе при  $m \rightarrow \infty$  эта ломаная линия совпадет с интегральной кривой, если функция  $f(x, y)$  удовлетворяет теореме существования и единственности.

Оформим эту идею в виде аналитического выражения, удобного для численных расчетов.

Запишем уравнение касательной к интегральной кривой в точке  $(x_n, y_n)$

$$y - y_n = f(x_n, y_n)(x - x_n). \quad (2)$$

Поскольку эта касательная проходит через точку  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ , то

$$y_{n+1} - y_n = f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) \text{ или} \\ y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h, \quad (3)$$

где  $h = x_{n+1} - x_n$  — шаг вычислений. Он чаще всего берется постоянным. Рекуррентная формула (3) и дает численное решение задачи Коши в узлах сетки методом Эйлера.

Метод Эйлера нагляден и прост, но дает большую погрешность, т.к. с каждым шагом вычислений происходит накопление ошибки. Поэтому он редко используется в вычислительной практике

Наиболее употребительным является метод Рунге-Кутта, основанный на разложении решения уравнения (1) в ряд Тейлора

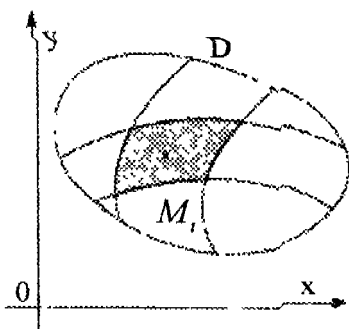
$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{1}{2}y''(x_n)h^2 + \dots \quad (4)$$

Если ограничиться двумя первыми членами ряда (4), то получим формулу Эйлера (3), имеющую первый порядок точности. Если сохранить третий член ряда (4), то получим формулу Рунге-Кутта, имеющую второй порядок точности. Наиболее употребительная схема Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Она записана в большинстве стандартных программ ЭВМ.

## ГЛАВА 9. Кратные интегралы.

### Элементы векторного анализа

#### § 1. Определения кратных интегралов. Свойства



Пусть замкнутая область  $D$ , лежащая в плоскости  $xOy$ , является областью определения непрерывной функции  $z = f(x, y)$ . Разобьем область  $D$  произвольным образом на элементарные площадки  $\Delta S_i$ . В каждой такой площадке выберем произвольную точку  $M_i$ . Вычислим значение функции в этой точке и составим сумму следующего вида

$$V_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i, \quad (1)$$

где  $n$  — число разбиений. Сумма (1) называется интегральной суммой для функции  $f(x, y)$  в области  $D$ . Меняя способ разбиений и увеличивая число разбиений, получим последовательность интегральных сумм

$$V_{n_1}, V_{n_2}, V_{n_3}, \dots \quad (2)$$

Будем предполагать, что линейные размеры каждой элементарной площадки  $\Delta S_i$  стремятся к нулю при неограниченном увеличении числа разбиений. Это будем записывать так:  $\text{diam} \Delta S_i \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ . Такие разбиения называются нормальными.

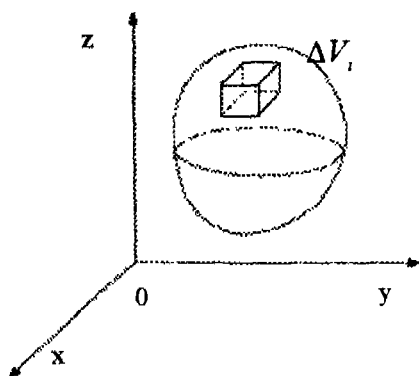
**Опр.1.** Если при любой нормальной последовательности разбиений соответствующие последовательности интегральных сумм (2) имеют предел, не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точки  $M_i$ , то этот предел

называется двойным интегралом функции  $f(x, y)$  по области  $D$ . Обозначается

$$\iint_D f(M) dS = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam} \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i. \quad (3)$$

Если область определения функции  $u = f(x, y, z)$  лежит не в плоскости  $z = 0$ , а на некоторой поверхности  $\sigma$ , то поступая аналогично, получим поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_{\sigma} f(M) d\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam} \Delta \sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i, \quad (4)$$



Если область определения  $V$  функции  $u = f(x, y, z)$  трехмерная, то получим тройной интеграл

$$\iiint_V f(M) dV = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam} \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta V_i. \quad (5)$$

Пусть в общем случае функция  $n$  переменных  $z = f(M)$ ,  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$ , определена в некоторой  $m$ -мерной замкнутой области  $\Omega \subset R_n$ . Разбивая эту область гиперплоскостями на элементарные так, чтобы они не имели общих внутренних точек, и составляя интегральные суммы, аналогично определим  $m$ -мерный интеграл



$$\int_{\Omega} f(M) d\Omega = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \text{diam} \Delta \Omega_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \Omega_i \quad (6)$$

Здесь  $\text{diam} \Delta \Omega_i = \max \|M_j - M_k\| \quad \forall M_j, M_k \in \Delta \Omega_i$ .

Будем предполагать, что интеграл  $\int_{\Omega} d\Omega$  существует,

множество  $\Omega$  будем называть измеримым по Жордану, а величину интеграла  $\int_{\Omega} d\Omega = |\Omega|$  будем называть мерой

Жордана множества  $\Omega$ . При  $m = 1$  мера Жордана  $|\Omega|$  – это длина, при  $m = 2$  – площадь, а при  $m \geq 3$  – объем. Пустому множеству  $\Omega = \emptyset$  ( $m = 0$ ) припишем меру Жордана равную нулю,  $|\Omega| = 0$ .

Если функция  $f(x, y, z)$  определена на дуге  $l$  некоторой кривой в  $R_3$ , то одномерный интеграл ( $\Omega$  в этом случае одномерное пространство) называется криволинейным интегралом первого рода. Обозначается так:

$$\int_l f(M) dl = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |\Delta l_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i \quad (7)$$

Если дуга  $l$  лежит на одной из осей координат, то криволинейный интеграл (7) совпадает с определенным интегралом. Если поверхность  $\sigma$  лежит в одной из координатных плоскостей, то двумерный интеграл (поверхностный интеграл (4)) совпадает с двойным интегралом (3).

**Теорема (существования).** Если функция  $z = f(M)$  непрерывна в замкнутой, измеримой по Жордану, ограниченной области  $\Omega$ , то интеграл  $\int_{\Omega} f(M) d\Omega$  существует (без доказательства).

Замечание. Теорема дает только достаточные условия существования интеграла. Интеграл может существовать и от разрывной функции. Существуют и несобственные кратные интегралы.

Отметим некоторые свойства кратных интегралов. Они аналогичны свойствам определенного интеграла.

$$1. \int_{\Omega} (f_1(M) + f_2(M)) d\Omega = \int_{\Omega} f_1(M) d\Omega + \int_{\Omega} f_2(M) d\Omega, \text{ если}$$

последние существуют.

$$2. \int_{\Omega} C f(M) d\Omega = C \int_{\Omega} f(M) d\Omega, C = \text{const.}$$

$$3. \int_{\Omega} f(M) d\Omega = \int_{\Omega_1} f(M) d\Omega + \int_{\Omega_2} f(M) d\Omega, \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1$$

и  $\Omega_2$  не имеют общих внутренних точек.

4. Если  $f_1(M) \leq f_2(M), \forall M \in \Omega$ , то

$$\int_{\Omega} f_1(M) d\Omega \leq \int_{\Omega} f_2(M) d\Omega.$$

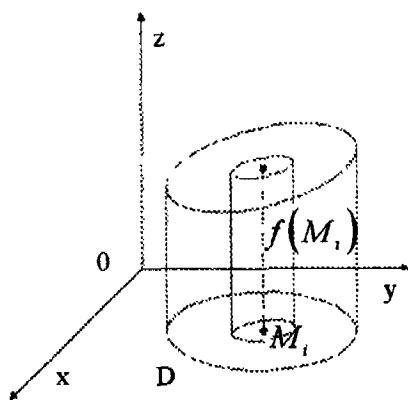
5.  $\int_{\Omega} f(M) d\Omega = f(M_0) \cdot |\Omega|$ , если  $f(M)$  непрерывна в  $\Omega$ ,

$$M_0 \in \Omega.$$

## § 2. Вычисление двойного и тройного интегралов в декартовой системе координат

Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения области  $D$ , то разобьем ее прямыми, параллельными осям координат. Тогда элементарные площадки разбиения будут прямоугольниками, поэтому их площади  $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$ , а двойной интеграл в декартовой системе координат запишется так:

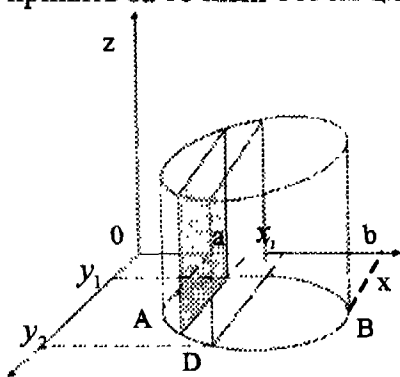
$$\iint_D f(M) dS = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (1)$$



С геометрической точки зрения функция  $z = f(x, y)$  представляет собой некоторую поверхность. Рассмотрим цилиндрическое тело, ограниченное сверху поверхностью  $z = f(x, y) \geq 0$ , основанием которого служит область  $D$ . Тогда, очевидно,  $f(M_i) \Delta S_i$  —

объем элементарного цилиндра (призмы),  $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta S_i \approx$

$V_n$  — приближенный объем цилиндрического тела, а предел  $V_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. двойной интеграл (1), естественно принять за точный объем цилиндрического тела.



Этот же объем можно вычислить иначе. Пусть область  $D$  лежит в полосе  $a \leq x \leq b$ . Точки  $A$  и  $B$  разбивают границу  $D$  на две кривые, уравнения которых  $y_1 = \varphi_1(x)$  и  $y_2 = \varphi_2(x)$ . Разсечем тело плоскостью  $x = x_i$ . Так как  $x_i$  — произвольная точка отрезка

$[a, b]$ , то площадь сечения  $S(x)$  будет функцией переменной  $x$ . Проведем второе сечение плоскостью  $x = x_i + \Delta x_i$ . Получим элементарное тело, объем которого

$\Delta V_i \approx S(x_i) \Delta x_i$ . Суммируя эти объемы и переходя к пределу, получим

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S(x_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx. \quad (2)$$

Площадь сечения  $S(x)$ , как известно, также можно найти с помощью определенного интеграла

$$S(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$V = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx. \quad (4)$$

Интеграл (4) называется повторным. Сначала вычисляется определенный интеграл по переменной  $y$  ( $x$  считается постоянной), а затем от полученного выражения берется определенный интеграл по  $x$ .

Сравнивая интегралы (1) и (4), получим правило вычисления двойного интеграла в декартовой системе координат

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (5)$$

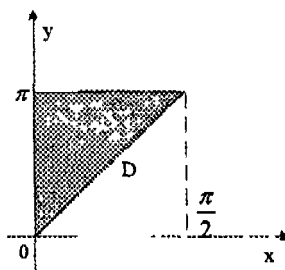
Если сечения проводить плоскостями  $y = y_i$ ,  $y = y_i + \Delta y_i$ , то аналогично получим

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (6)$$

Заметим, что область  $D$  мы считали правильной, т.е. такой, когда прямые параллельные осям координат пересекают ее границу не более, чем в двух точках. Если область  $D$  неправильная, ее разбивают на правильные части.

**Пример 1.** Вычислить  $\iint_D \cos(x+y) dx dy$  по области  $D$ , ограниченной прямыми  $x=0$ ,  $y=\pi$ ,  $y=2x$ .

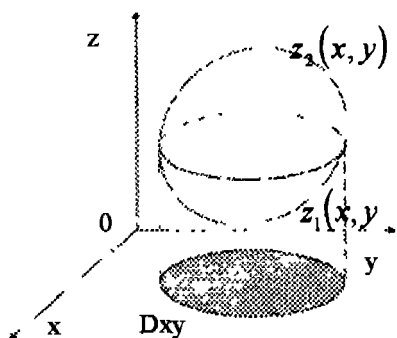
**Решение.** Воспользуемся (5).



$$\iint_D \cos(x+y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{2x}^{\pi} \cos(x+y) dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) \Big|_{2x}^{\pi} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x+\pi) - \sin 3x) dx = -\frac{4}{3}$$



Дадим теперь способ вычисления тройного интеграла в декартовой системе координат. Так как предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения области  $V$ , то разобьем ее плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Тогда  $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ , а тройной интеграл запишется так:

$$\iiint_V f(M) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz. \quad (7)$$

Вычисляется тройной интеграл (7), как и двойной, путем сведения к повторному.

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{Dxy} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (8)$$

Сначала вычисляется определенный интеграл по переменной  $z$  ( $x$  и  $y$  считаются постоянными), а затем двойной по области  $D_{xy}$  – проекции области  $V$  на плоскость  $xOy$ . Проектирующий цилиндр разбивает поверхность области  $V$  на две – нижнюю, уравнение которой  $z = z_1(x, y)$ , и верхнюю, уравнение которой  $z = z_2(x, y)$ . Они и являются пределами интегрирования в определенном интеграле.

Если проектировать область  $V$  на плоскости  $xOz$  и  $yOz$ , то получим аналогичные формулы:

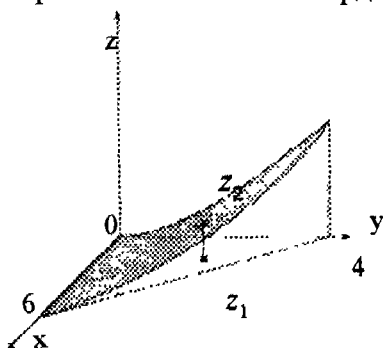
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xz}} dx dz \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy, \quad (9)$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} dy dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx. \quad (10)$$

Область  $V$  считалась правильной, т.е. такой, что прямые параллельные осям координат, пересекают ее границу не более, чем в двух точках.

**Пример 2.** Найти объем тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостью  $2x + 3y - 12 = 0$  и цилиндром  $z = \frac{1}{2}y^2$ .

**Решение.**



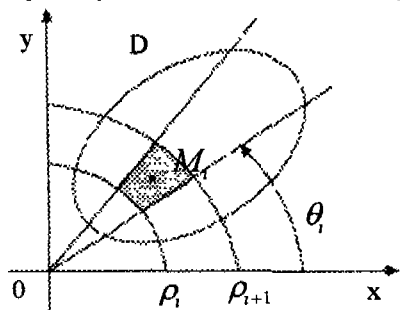
$$V = \iiint_V dV = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{\frac{1}{2}y^2} dz = \frac{1}{2} \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} y^2 dy = 16.$$

### § 3. Двойной интеграл в полярной системе координат

Введем полярную систему координат, связанную с декартовой следующими формулами:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (1)$$

Пусть  $\rho = \text{const}$ , Тогда  $x^2 + y^2 = \rho^2$  – окружность. Если



$\theta = \text{const}$ , то  $\frac{y}{x} = \text{tg } \theta = \text{const}$

– полупрямые (лучи). Линии  $\rho = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  называются координатными линиями полярной системы координат. Так как координатные линии кривые,

то и система называется криволинейной.

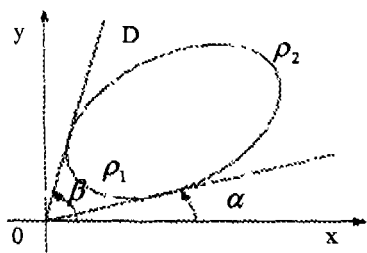
Рассмотрим двойной интеграл в полярной системе координат. Разобьем область  $D$  координатными линиями  $\rho = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  на элементарные площадки  $\Delta S_i$ , равные разности площадей двух секторов с радиусами  $\rho_{i+1}$

$$\text{и } \rho_i, \text{ т.е. } \Delta S_i = \frac{1}{2} \rho_{i+1}^2 \Delta \theta_i - \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta \theta_i =$$

$$= \frac{1}{2} (\rho_{i+1} - \rho_i) (\rho_{i+1} + \rho_i) \Delta \theta_i = \frac{1}{2} \Delta \rho_i (2\rho_i + \Delta \rho_i) \Delta \theta_i \approx \rho_i \Delta \rho_i \Delta \theta_i.$$

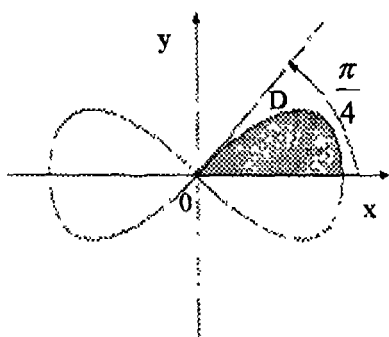
Учитывая это и формулы (1), запишем двойной интеграл в полярной системе координат

$$\iint_D f(M) dS = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (2)$$



Пусть касательные лучи к правильной области  $D$   $\theta_1 = \alpha$ ,  $\theta_2 = \beta$  делят границу области на две кривые  $\rho_1 = \varphi_1(\theta)$  и  $\rho_2 = \varphi_2(\theta)$  Тогда интеграл (2) можно свести к повторному

$$\iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho. \quad (3)$$



**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  (лемниската Бернулли).

**Решение.** Запишем лемнискату Бернулли в полярной системе координат  $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ . Используя (2),

$$\text{получим } S = 4 \iint_D dS = 4 \iint_D \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho d\rho = a^2.$$

**Пример 2.** Найти интеграл  $I = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ ,

$$D: \{0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty\}.$$

**Решение.** Перейдем к полярной системе координат.

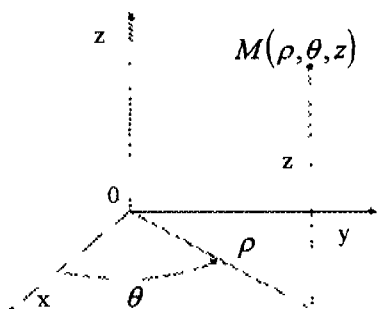
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{\pi}{4} e^{-\rho^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$



С другой стороны  $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \left( \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$ ,

т.е.  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  Этот интеграл называется интегралом Пуассона.

#### § 4. Тройной интеграл в цилиндрической и сферической системах координат

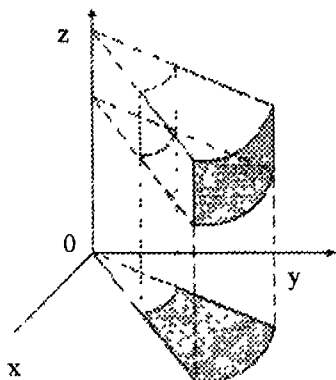


В случае цилиндрических координат положение точки  $M$  в пространстве определяется тремя координатами  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $z$ , где  $\rho$  и  $\theta$  — полярные координаты проекции точки  $M$  на плоскость  $xOy$ , а  $z$  —

аппликата точки  $M$ . Декартовы координаты связаны с цилиндрическими следующим образом:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z \quad (1)$$

Координатными поверхностями  $\rho = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  являются соответственно цилиндры, полуплоскости,



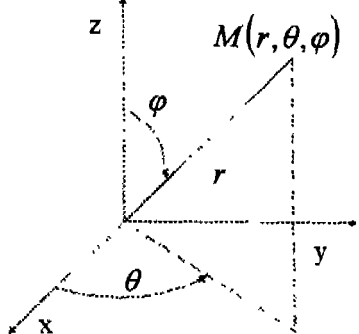
проходящие через ось  $z$ , и плоскости, перпендикулярные оси  $z$ . Пересечение двух координатных поверхностей дает координатную линию. Координатными линиями в цилиндрической системе координат являются прямые параллельные оси  $z$  и перпендикулярные к ней, и

окружности, лежащие в плоскостях перпендикулярных оси  $z$ , центры которых на оси  $z$ . Элементарный объем, в цилиндрических координатах, очевидно, равен

$$\Delta V = \Delta S \cdot \Delta z \approx \rho \Delta \rho \Delta \theta \Delta z.$$

Поэтому тройной интеграл в цилиндрической системе координат имеет следующий вид:

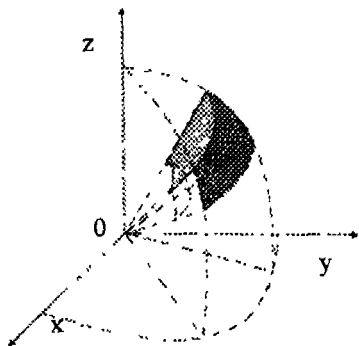
$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iiint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz. \quad (2)$$



В сферической системе координат точка  $M$  определяется тремя координатами  $r, \theta, \varphi$ . При этом  $r$  – расстояние точки  $M$  от начала координат (модуль радиуса – вектора  $\vec{r}$ ),  $\theta$  – угол между проекцией радиуса-вектора на плоскость  $xOy$  и

осью  $x$ , а угол  $\varphi$  – это угол между радиус-вектором и осью  $z$ . Координаты  $r, \theta, \varphi$  изменяются в следующих пределах:  $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < \pi$  и связаны с декартовыми формулами:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi. \quad (3)$$



Координатными поверхностями  $r = \text{const}, \theta = \text{const}, \varphi = \text{const}$  являются соответственно сферы, полуплоскости и конусы. Координатными линиями будут лучи, выходящие из начала координат, окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси  $z$ , с

центрами на оси  $z$ , полуокружности с центрами в начале координат, диаметры которых на оси  $z$ . Координатными

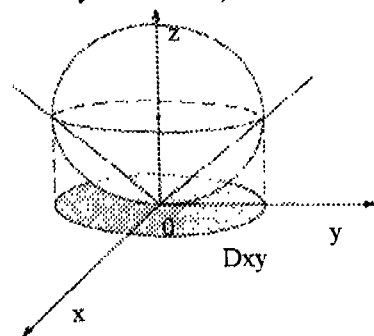
поверхностями область  $V$  разбивается на элементарные области  $\Delta V$ , которые с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно считать прямоугольными параллелепипедами. Длины ребер этих параллелепипедов следующие  $\Delta r, r \sin \varphi \Delta \theta, r \Delta \varphi$ .

Поэтому элементарный объем  $\Delta V \approx r^2 \sin \varphi \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi$ . А тройной интеграл в сферической системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dV = \\ & = \iiint_V f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Расстановку пределов в цилиндрической и сферической системах координат рассмотрим на примере.

**Пример.** Найти момент инерции  $I_z$  тела, образованного общей частью шара  $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$  и конуса  $x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$ , если плотность тела равна единице.



**Решение.** Момент инерции  $I_z$  определяется формулой

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) dV. \quad (5)$$

Первый способ. Вычислим (5) в цилиндрической системе координат. Очевидно,  $D_{xy}$  является кругом  $x^2 + y^2 \leq R^2$ .

Запишем уравнения сферы и конической поверхности в цилиндрической системе координат:  $\rho^2 + (z - R)^2 = R^2$  и  $\rho = z$ . Используя (2), получим

$$I_z = \iint_{D_{xy}} \rho d\rho d\theta \int_{\rho}^{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho^2 dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 (R + \sqrt{R^2 - \rho^2} - \rho) d\rho =$$

$$= \frac{11}{30} \pi R^5.$$

Второй способ. Вычислим (5) в сферической системе координат. Запишем уравнения сферы и конической поверхности в сферической системе координат:

$$r = 2R \cos \varphi \text{ и } \varphi = \frac{\pi}{4}. \text{ Используя (4), получим}$$

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^4 \sin^3 \varphi dr = \frac{11}{30} \pi R^5.$$

### § 5. Замена переменных в кратных интегралах

Рассмотрим в  $R_3$  две ортогональные системы координат криволинейную  $\{u_i\}_{i=1}^3$  и декартову  $\{x_i\}_{i=1}^3$ . Пусть нелинейный оператор  $\bar{g}$  преобразует криволинейные координаты некоторой точки в декартовы координаты этой же точки, т.е.

$$\bar{x} = \bar{g}(\bar{u}), \quad (1)$$

$$\text{где } \bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{u} = (u_1, u_2, u_3).$$

Перепишем (1) в скалярном виде

$$x_1 = g_1(u_1, u_2, u_3), \quad x_2 = g_2(u_1, u_2, u_3), \quad x_3 = g_3(u_1, u_2, u_3). \quad (1')$$

Нам понадобится и другая интерпретация равенств (1) и (1'). А именно, функция  $\bar{g}(\bar{u})$  каждую точку  $\bar{u}$  своей области определения  $D$  отображает в другую точку  $\bar{x} \in D'$ , т.е. отображает область  $D$  в область  $D'$ .

Рассмотрим радиус-вектор  $\vec{r} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}$ . Если его конец движется по координатной линии  $u_1$  (при этом  $u_2 = \text{const}$ ,  $u_3 = \text{const}$ ), то  $\vec{r}$  является функцией только одной криволинейной координаты  $u_1$ . Считая функции  $g_i$

дифференцируемыми, найдем в некоторой точке частный дифференциал

$$d\vec{r}_1 = \frac{\partial g_1}{\partial u_1} du_1 \vec{i} + \frac{\partial g_2}{\partial u_1} du_1 \vec{j} + \frac{\partial g_3}{\partial u_1} du_1 \vec{k}.$$

Аналогично найдем два других частных дифференциала

$$d\vec{r}_2 = \left( \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \vec{i} + \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \vec{j} + \frac{\partial g_3}{\partial u_2} \vec{k} \right) du_2,$$

$$d\vec{r}_3 = \left( \frac{\partial g_1}{\partial u_3} \vec{i} + \frac{\partial g_2}{\partial u_3} \vec{j} + \frac{\partial g_3}{\partial u_3} \vec{k} \right) du_3.$$

Векторы  $d\vec{r}_1$ ,  $d\vec{r}_2$ ,  $d\vec{r}_3$  исходят из одной точки и направлены по касательным к координатным линиям  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ . Найдем объем  $dV$  элементарного параллелепипеда, построенного на векторах  $d\vec{r}_1$ ,  $d\vec{r}_2$ ,  $d\vec{r}_3$  как на ребрах. Для этого достаточно найти модуль смешанного произведения этих векторов

$$dV = |(d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, d\vec{r}_3)| = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \frac{\partial g_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_3} & \frac{\partial g_2}{\partial u_3} & \frac{\partial g_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} du_1 du_2 du_3. \quad (2)$$

Функциональный определитель

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \frac{\partial g_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_3} & \frac{\partial g_2}{\partial u_3} & \frac{\partial g_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} \quad (3)$$

называют якобианом и обозначают  $I = \frac{D(g_1, g_2, g_3)}{D(u_1, u_2, u_3)}$ .

Равенство (2) перепишем в виде  $dV = |I| dV_1$ , (4)

где  $dV_1 = du_1 du_2 du_3$ .

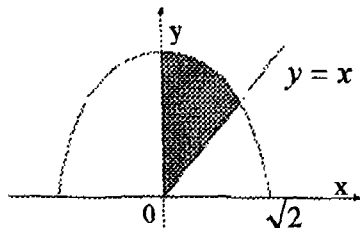
Согласно второй интерпретации равенства (1), модуль якобиана в формуле (4) является коэффициентом искажения объема в некоторой точке при отображении области  $D$  в область  $D'$ . А согласно первой интерпретации элементарный объем  $dV = |I| du_1 du_2 du_3$  является тем же элементарным объемом, только записанным в координатах другой системы координат. Согласно этой интерпретации для перехода к новым переменным достаточно переменные  $x_1, x_2, x_3$  заменить на переменные  $u_1, u_2, u_3$ , согласно формулам (1'), а  $dx_1 dx_2 dx_3$  заменить на  $|I| du_1 du_2 du_3$ . В результате получим

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{D'} f(g_1(u_1, u_2, u_3), g_2(u_1, u_2, u_3), g_3(u_1, u_2, u_3)) |I| du_1 du_2 du_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично можно получить правило замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |I| du dv, \quad (6)$$

где  $I = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$ .



**Пример 1.** Найти центр тяжести пластины, представляющей собой часть эллипса  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$  (см. рис.), если ее плотность равна

единице.

**Решение.** Координаты центра тяжести вычисляются по формулам  $x_c = \frac{1}{S} \iint_D x dx dy$ ,  $y_c = \frac{1}{S} \iint_D y dx dy$ ,  $S = \iint_D dx dy$ .

Введем обобщенную полярную систему координат по формулам  $x = \sqrt{2}\rho \cos\theta$ ,  $y = 2\rho \sin\theta$ . Координатными линиями  $\rho = \text{const}$  будут эллипсы  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = \rho^2$ , а координатными линиями  $\theta = \text{const}$  — лучи  $\frac{1}{\sqrt{2}}y = x \operatorname{tg}\theta$ .

Поэтому уравнение эллипса в новой системе запишется как  $\rho = 1$ , уравнение прямой  $y = x$  как  $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , а уравнение прямой  $x = 0$  как  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Вычислим якобиан

$$I = \begin{vmatrix} x'_\rho & y'_\rho \\ x'_\theta & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} \cos\theta & 2 \sin\theta \\ -\sqrt{2}\rho \sin\theta & 2\rho \cos\theta \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}\rho.$$

Используя (2), найдем

$$S = \iint_D dx dy = \int_{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 2\sqrt{2}\rho d\rho = \sqrt{2} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 1,33,$$

$$x_c = \frac{1}{S} \int_{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 2\sqrt{2}\rho \cdot \sqrt{2}\rho \cos\theta d\rho \approx 0,424.$$

**Упражнение.** Вычислить  $y_c$ .

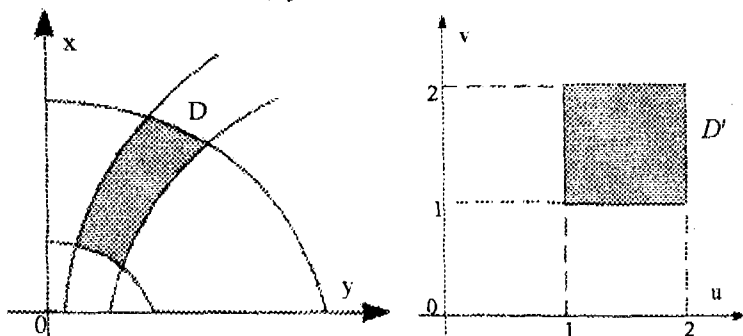
**Пример 2.** Найти площадь, ограниченную эллипсами

$$\frac{x^2}{ch^2 u} + \frac{y^2}{sh^2 u} = a^2 \quad (u = 1, u = 2) \text{ и гиперболами}$$

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = a^2 \quad (v = 1, v = 2), \text{ если } x > 0, y > 0.$$

**Решение.** Сделаем замену

$$x = achu \cos v, \quad y = ashu \sin v. \quad (7)$$



Функция, заданная уравнениями (7), отображает область  $D$  (см. рис.) на область  $D'$ . При этом граница области  $D$  переходит в границу области  $D'$ . Нетрудно убедиться, что эллипсы переходят в прямые  $u = 1, u = 2$ , а гиперболы – в прямые  $v = 1, v = 2$ . Так что область  $D$  отображается в квадрат.

Найдем якобиан 
$$I = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{2} a^2 (ch 2u - \cos 2v).$$

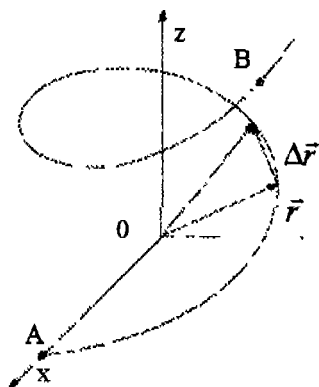
Переходя к новым координатам  $u, v$ , найдем

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \iint_{D'} |I| du dv = \frac{1}{2} a^2 \int_1^2 du \int_1^2 (ch 2u - \cos 2v) dv = \\ &= \frac{1}{4} a^2 (sh 4 - sh 2 - \sin 4 + \sin 2). \end{aligned}$$



## § 6. Криволинейные интегралы

Будем рассматривать только спрямляемые, т.е. имеющие длину, непрерывные кривые без точек самопересечения. Кривые будем считать гладкими, т.е. такими, в каждой точке которых можно провести касательную, или кусочно-гладкими. Их можно разбить на конечное число гладких частей.



Ранее (в §1) на такой кривой в  $R_3$  был определен криволинейный интеграл первого рода. Дадим способ его вычисления.

Пусть кривая  $\overset{\cup}{AB}$  определена радиус-вектором  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ . Тогда  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} =$

$$= (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k})dt.$$

Поскольку элементарная дуга  $dl$  эквивалентна хорде  $|d\vec{r}|$ , то  $dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$ , и криволинейный интеграл первого рода можно свести к определенному следующим образом:

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt. \quad (1)$$

Точке  $A$  отвечает значение параметра  $t = t_0$ , а точке  $B$  —  $t = t_1$ .

Поскольку  $dl$  и  $f(x, y, z)$  не зависят от того, движется ли точка по кривой от  $A$  к  $B$  или, наоборот, от  $B$  к  $A$ , то криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления движения т.е.

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y, z) dl = \int_{\overset{\curvearrowright}{BA}} f(x, y, z) dl.$$

**Пример 1.** Найти массу первого витка винтовой линии  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ , если плотность в каждой точке равна аппликате точки.

**Решение.**  $m = \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} f(x, y, z) dl$ , где плотность  $f(x, y, z) = |z| =$

$= bt$ ,  $dl = \sqrt{a^2 + b^2} dt$ . Используя (1), найдем

$$m = \int_0^{2\pi} bt \cdot \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi^2 b \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Кроме криволинейного интеграла первого рода существует и криволинейный интеграл второго рода.

Найдем работу силы  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  по перемещению материальной точки по некоторой дуге  $\overset{\curvearrowright}{AB}$ . Для этого разобьем дугу  $\overset{\curvearrowright}{AB}$  на элементарные дуги  $dl_i$  и заменим дугу  $dl_i$  на хорду  $|\Delta\vec{r}_i|$ . Тогда элементарная работа силы  $\vec{F}(x, y, z)$  будет равна  $\delta A_i \approx (\vec{F}(x_i, y_i, z_i), \Delta\vec{r}_i)$ , где  $(x_i, y_i, z_i)$  — некоторая точка на дуге  $dl_i$ . Суммируя элементарные работы и переходя к пределу, получим

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ |\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \vec{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta\vec{r}_i = \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{r}. \quad (2)$$

Интеграл (2) называется криволинейным интегралом второго рода. Раскрывая скалярное произведение, перепишем (2) в виде

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \vec{F}(x, y, z) d\vec{r} = \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz, \quad (2')$$

где  $F_x = P$ ,  $F_y = Q$ ,  $F_z = R$ .

Поскольку  $d\vec{r}$  меняет знак с переменной направления движения по кривой, то  $\int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{\overset{\curvearrowright}{BA}} \vec{F} d\vec{r}$ . Вычисляется

криволинейный интеграл второго рода путем сведения его к определенному. Рассмотрим это на примере.

**Пример 2.** Найти работу силы  $\vec{F} = x\vec{i} + 2\vec{j} + y\vec{k}$  на первом витке винтовой линии  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ .

**Решение.** Используя (2), получим

$$A = \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\overset{\curvearrowright}{AB}} x dx + 2 dy + y dz = \left. \begin{array}{l} dx = -a \sin t dt \\ dy = a \cos t dt \\ dz = b dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-a^2 \cos t \cdot \sin t + 2a \cos t + ab \sin t) dt = 0.$$

## § 7. Поверхностные интегралы

Будем рассматривать только двусторонние поверхности без самопересечений, в каждой точке которых можно провести касательную плоскость. Эллипсоид, например, отвечает всем перечисленным требованиям. Внешнюю его поверхность назовем положительной, а внутреннюю — отрицательной. Плоскость  $x + y + z = 1$  также отвечает перечисленным требованиям. Ту сторону плоскости, перпендикуляр к которой составляет острый угол с осью  $z$ , назовем положительной, противоположную сторону — отрицательной.

Замечание. Существуют и односторонние поверхности, например, лист Мебиуса, бутылка Клейна.

Рассмотрим бесконечно малую окрестность точки  $M_0$  на поверхности  $\sigma$ . Введем вектор  $d\vec{\sigma}$ , модуль которого равен площади бесконечно малой окрестности точки  $M_0$ , а

направлен он по перпендикуляру к положительной стороне поверхности  $\sigma$  в точке  $M_0$ . Так что

$$d\vec{\sigma} = d\sigma \cdot \vec{n}^0 = d\sigma (\cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k}). \quad (1)$$

Если  $g(x, y, z) = C$  – уравнение поверхности, то вектор нормали к ней в некоторой точке совпадает с  $\text{grad } g(x, y, z)$  в этой точке (см. (8) §5 гл.6). Если поверхность задана в явном виде  $z = f(x, y)$ , тогда  $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$  и

$$\vec{n}^0 = \frac{\text{grad}(z - f(x, y))}{|\text{grad}(z - f(x, y))|} = \frac{-f'_x \vec{i} - f'_y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}},$$

$$\cos\alpha = -\frac{f'_x}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{f'_y}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}, \quad (2)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}}.$$

Проекция вектора  $d\vec{\sigma}$  на ось  $z$  равна  $np_z d\vec{\sigma} = d\sigma \cdot \cos\gamma$ .

Геометрически эта проекция означает площадь площадки перпендикулярной оси  $z$ , т.е.  $\cos\gamma d\sigma = dS_{xy} = dx dy$ .

Аналогично  $np_y d\vec{\sigma} = dS_{xz} = dx dz$ ,  $np_x d\vec{\sigma} = dS_{yz} = dy dz$ .

Поэтому (1) можно переписать так

$$d\vec{\sigma} = dy dz \vec{i} + dx dz \vec{j} + dx dy \vec{k}, \quad (3)$$

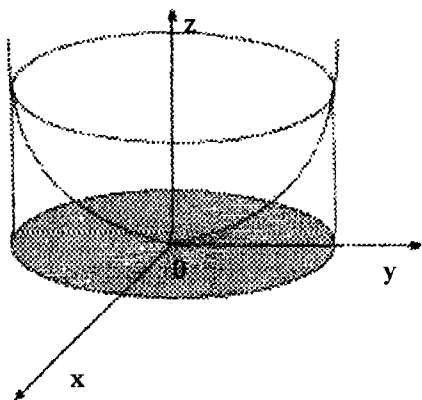
$$\text{а } d\sigma = \frac{dS_{xy}}{\cos\gamma} = \frac{dx dy}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy. \quad (4)$$

Учитывая (4), поверхностный интеграл первого рода (см. (4) §1) легко свести к двойному

$$\iint_{\sigma} F(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy. \quad (5)$$

Здесь  $D_{xy}$  – проекция поверхности  $\sigma$  на плоскость  $xOy$ . Аналогичные формулы можно получить, проектируя поверхность на плоскости  $xOz$  и  $yOz$ .

**Пример 1.** Определить суммарный электрический заряд  $Q$ , равномерно распределенный на части поверхности параболоида  $2az = x^2 + y^2$ , вырезанной из него цилиндром  $x^2 + y^2 = a^2$ .



**Решение.** Очевидно,

$$Q = \iint_{\sigma} \gamma d\sigma, \text{ где } \gamma -$$

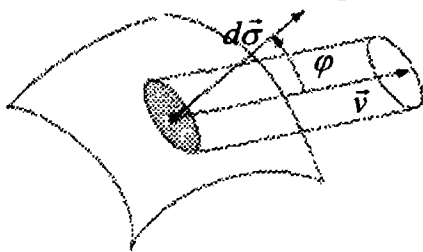
плотность распределения заряда. Воспользуемся (5) и сведем поверхностный интеграл к двойному по области  $D_{xy}$ , где  $D_{xy}$  – круг  $x^2 + y^2 \leq a^2$ .

$$Q = \gamma \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy =$$

$$= \gamma \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2)} dx dy = \frac{2}{3} \pi \gamma a^2 (2\sqrt{2} - 1).$$

Кроме поверхностного интеграла первого рода существует и поверхностный интеграл второго. Введем его на примере

следующей задачи. Найти количество жидкости, протекающей через поверхность  $\sigma$  за единицу времени, если скорость течения жидкости  $\vec{v}(x, y, z)$ , а плотность ее  $\rho = \text{const}$ .



**Решение.** Рассмотрим элементарную площадку  $d\sigma$  на поверхности  $\sigma$ . Очевидно, количество жидкости, протекающей через нее, пропорционально объему элементарного цилиндра, образующая которого  $|\vec{v}|$ , а основание  $d\sigma$ , т.е.  $dm = \rho |\vec{v}| \cdot |d\vec{\sigma}| \cos\varphi = \rho \vec{v} d\vec{\sigma}$

Суммируя элементарные потоки жидкости через элементарные площадки, получим интеграл

$$m = \iint_{\sigma} \rho \vec{v} d\vec{\sigma}, \quad (6)$$

который называется поверхностным интегралом второго рода. Учитывая (1), поверхностный интеграл второго рода можно записать так:

$$\iint_{\sigma} \vec{v} d\vec{\sigma} = \iint_{\sigma} v_x dydz + v_y dx dz + v_z dx dy \quad (7)$$

Вычисляется поверхностный интеграл второго рода путем сведения его к двойному интегралу

**Пример 2.** Найти количество жидкости, протекающей за

единицу времени через часть плоскости  $x + 2y + 3z = 6$ , расположенную в первом октанте, если скорость течения жидкости

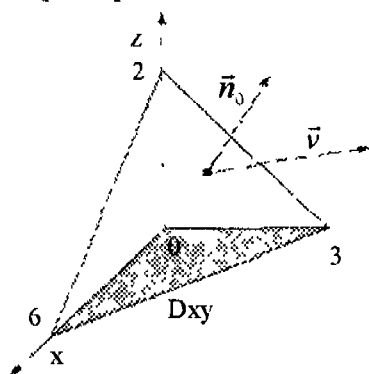
$$\vec{v} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \rho = 1.$$

**Решение.** Воспользуемся (6)

$$m = \iint_{\sigma} \vec{v} d\vec{\sigma} \quad \text{Пусть } \vec{n}^0 -$$

единичный вектор данной

плоскости, т.е.  $\vec{n}^0 = \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right)$ , тогда  $d\sigma = \frac{dx dy}{\cos\gamma} =$



$$= \frac{\sqrt{14}}{3} dx dy, \text{ а } \vec{v} d\vec{\sigma} = d\sigma \cdot (\vec{v}, \vec{n}^0) = \frac{1}{3}(2x + 2y + 3z) dx dy.$$

Таким образом, получим  $m = \iint_{\sigma} \vec{v} d\vec{\sigma} = \frac{1}{3} \iint_{\sigma} (2x + 2y + 3z) dx dy$ . Выражая  $z$  из уравнения плоскости через  $x$  и  $y$  и подставляя его в последний интеграл, сведем его к двойному.

$$m = \frac{1}{3} \iint_{D_{xy}} (x + 6) dx dy = \frac{1}{3} \int_0^6 (x + 6) dx \int_0^{3-\frac{1}{2}x} dy = 24.$$

**Упражнение.** В примере 2 найти количество жидкости, протекающее через части координатных плоскостей, отсекаемые плоскостью  $x + 2y + 3z = 6$ .

**Ответ.**  $m_x = m_y = m_z = 0$ .

## § 8. Понятие скалярного и векторного полей

Если в каждой точке некоторой области задана скалярная функция  $u(x, y, z)$  или векторная функция  $\vec{a}(x, y, z)$ , то говорят, что задано скалярное или векторное поле. Поле температур, поле давления – примеры скалярных полей. Поле электрической напряженности, поле скоростей жидкости – примеры векторных полей.

Одной из характеристик скалярного поля  $u(x, y, z)$  является градиент

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (1)$$

Градиент характеризует наибольшую скорость изменения поля. В скалярном поле часто рассматриваются поверхности уровня, т.е. такие поверхности, на которых

функция  $u(x, y, z) = \text{const}$ . Градиент, как известно, перпендикулярен поверхности уровня.

В векторном поле вводится понятие векторной линии. Под векторной линией понимается кривая, касательная к которой в каждой ее точке совпадает с направлением поля  $\vec{a}(x, y, z)$  в этой же точке. Если конец радиус-вектора движется вдоль векторной линии, то вектор  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  направлен по касательной к этой линии. Поэтому, согласно определению векторной линии, получим

$$\vec{a}(x, y, z) = \lambda d\vec{r}. \quad (2)$$

Переписав (2) в скалярном виде, получим систему ОДУ векторных линий

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}. \quad (2')$$

Важнейшими характеристиками векторного поля  $\vec{a}(x, y, z)$  являются дивергенция, ротор и скалярный потенциал. Дивергенция векторного поля определяется функцией

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (3)$$

и характеризует плотность источников векторного поля. В электростатических и магнитных полях источниками являются электрические заряды и полюса магнитов. Если  $\text{div } \vec{a} = 0$  в каждой точке поля, то это поле без источников. Такое поле называют соленоидальным.

Ротор векторного поля  $\vec{a}(x, y, z)$  определяется формулой

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \quad (4)$$



и характеризует завихренность векторного поля. Если, например,  $\vec{a}$  – скорость течения жидкости, то  $\text{rot} \vec{a} = 0$  означает, что течение ламинарное, без завихрений. Такое поле называют потенциальным.

Если поле  $\vec{a}(x, y, z)$  потенциальное, то найдется функция  $u(x, y, z)$ , называемая скалярным потенциалом (потенциальной энергией) векторного поля, такая, что  $\text{grad} u = \vec{a}$ . Это равносильно равенству  $du = a_x dx + a_y dy + a_z dz$ , где  $du$  – полный дифференциал функции  $u(x, y, z)$ . Поэтому, если поле  $\vec{a}(x, y, z)$  потенциальное в некоторой односвязной области, то его потенциал можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{M_0 M} a_x dx + a_y dy + a_z dz \quad (5)$$

Здесь  $M_0 M$  означает любую кривую соединяющую точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  и  $M(x, y, z)$ .

Если поле  $\vec{a}(x, y, z)$  соленоидальное, то найдется векторная функция  $\vec{\psi}(x, y, z)$  такая, что  $\vec{a} = \text{rot} \vec{\psi}$ . Функция  $\vec{\psi}(x, y, z)$  называется векторным потенциалом поля. Произвольное векторное поле  $\vec{a}(x, y, z)$  можно представить в виде  $\vec{a} = \text{grad} u + \text{rot} \vec{\psi}$ , где  $u$  и  $\vec{\psi}$  – скалярный и векторный потенциалы поля.

Рассмотренные дифференциальные операции  $\text{grad} u$ ,  $\text{div} \vec{a}$ ,  $\text{rot} \vec{a}$  удобнее записывать с помощью векторно-дифференциального оператора Гамильтона

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \text{ Знак } \nabla \text{ называют набла.}$$

Подействуем оператором набла на скалярное поле  $u(x, y, z)$ . Получим  $\nabla u = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \text{grad} u$ .

$$\begin{aligned} \text{Аналогично } \nabla \vec{a} &= \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z) = \\ &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a}, \quad \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{a}. \end{aligned}$$

Итак,  $\nabla u = \operatorname{grad} u$ ,  $\nabla \vec{a} = \operatorname{div} \vec{a}$ ,  $\nabla \times \vec{a} = \operatorname{rot} \vec{a}$ . (6)

Поверхностный интеграл второго рода  $\iint_{\sigma} \vec{a} d\vec{\sigma}$  называется

поток векторного поля через поверхность  $\sigma$ . Если поток векторного поля через замкнутую поверхность отличен от нуля, то, очевидно, внутри есть источник. Отсюда понятна связь между поверхностным и тройным интегралами. Эта связь дается формулой Остроградского-Гаусса

$$\iint_{\sigma} \vec{a} d\vec{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad (7)$$

Здесь  $\sigma$  — граница области  $V$ .

Заметим, что дивергенцию как плотность источников векторного поля удобнее определить формулой

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \iint_{\sigma} \vec{a} d\vec{\sigma} \right). \quad (3')$$

Тогда формула (3) будет следствием определения (3').

Криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой  $\oint_l \vec{a} d\vec{r}$  называется циркуляцией векторного поля.

Она связана с поверхностным интегралом второго рода формулой Стокса

$$\oint_l \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{\sigma}. \quad (8)$$

Здесь  $l$  — граница поверхности  $\sigma$ .

В частности, если  $l$  – граница односвязной области  $D$  на плоскости  $xOy$ ,  $\vec{a} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ , то формула Стокса (8) примет вид

$$\oint_l P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (9)$$

Формула (9) называется формулой Грина.

**Пример.** Найти количество жидкости, протекающей за единицу времени через полную поверхность пирамиды с вершиной в начале координат (см. пример 2 §7).

**Решение.** Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса. Поскольку  $\operatorname{div} \vec{v} = 4$ , то  $m = \oiint_{\sigma} \vec{v} d\vec{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} dV =$

$$4 \iiint_V dV = 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

**Упражнение.** Решить задачу, не используя формулу Остроградского-Гаусса.

## § 9\*. Векторные операции в криволинейных координатах

Рассмотрим две ортонормированные системы координат декартову  $\{x_i\}_{i=1}^3$  и криволинейную  $\{u_i\}_{i=1}^3$ , связанные между собой зависимостью (1) §5. Будем считать, что функции  $g_i(u_1, u_2, u_3)$  определяют непрерывно дифференцируемые обратные функции  $u_i = g_i^{-1}(x_1, x_2, x_3)$ , а

якобиан  $\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} \neq 0$ . Перепишем формулы §5

$$d\vec{r}_i = \left( \frac{\partial g_1}{\partial u_i} \vec{i} + \frac{\partial g_2}{\partial u_i} \vec{j} + \frac{\partial g_3}{\partial u_i} \vec{k} \right) du_i. \quad (1)$$

Из (1) найдем  $\frac{d\vec{r}_i}{du_i} = H_i \vec{e}_i$ , (2)

где  $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial g_1}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_3}{\partial u_i}\right)^2}$  - (3)

коэффициенты Ламе,  $\vec{e}_i$  - орты криволинейной системы координат.

Из (2) получим, что  $\frac{du_i}{|d\vec{r}_i|} = \frac{1}{H_i}$ , где  $\frac{du_i}{|d\vec{r}_i|}$ , согласно определению (см. §5 гл.6), есть производная функции  $u_i$  по направлению касательной к координатной линии  $u_i$ . Тогда

$$\frac{du_i}{|d\vec{r}_i|} = \text{grad } u_i \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{H_i} \quad (4)$$

С другой стороны,  $\text{grad } u_i$  перпендикулярен поверхности уровня  $u_i = \text{const}$ , следовательно, коллинеарен вектору  $\vec{e}_i$ , т.е.  $\text{grad } u_i = h_i \cdot \vec{e}_i$ . (5)

Подставляя (5) в (4), найдем  $h_i = \frac{1}{H_i}$ . Поэтому из (5) следует

$$\text{grad } u_i = \frac{1}{H_i} \cdot \vec{e}_i. \quad (6)$$

Градиент от сложной функции можно записать так:  
 $\text{grad } \varphi(u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \text{grad } u_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \text{grad } u_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \text{grad } u_3.$

Подставляя в последнюю формулу (6), получим выражение градиента в криволинейных координатах

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \vec{e}_3. \quad (7)$$

Формулу (7) удобнее переписать в виде  $\text{grad } \varphi =$

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left( \vec{e}_1 H_2 H_3 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \vec{e}_2 H_1 H_3 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \vec{e}_3 H_1 H_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right). \quad (7')$$

Поскольку  $\nabla \varphi = \text{grad } \varphi$ , то из (7') получим выражение оператора  $\nabla$  в криволинейных координатах  $\nabla =$

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left( \vec{e}_1 H_2 H_3 \frac{\partial}{\partial u_1} + \vec{e}_2 H_1 H_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + \vec{e}_3 H_1 H_2 \frac{\partial}{\partial u_3} \right). \quad (8)$$

Выражения  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{rot } \vec{a}$  в криволинейных координатах получаются символическим умножением оператора (8) на вектор  $\vec{a}$ .  $\text{div } \vec{a} =$

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (a_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial u_3} (a_3 H_1 H_2) \right), \quad (9)$$

$$\text{rot } \vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \vec{e}_1 & H_2 \vec{e}_2 & H_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ H_1 a_1 & H_2 a_2 & H_3 a_3 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Здесь  $a_i$  —  $i$ -ая координата вектора  $\vec{a}$  в криволинейной системе координат.

Векторно-дифференциальные операции  $\text{grad } u = \nabla u$ ,  $\text{div } \vec{a} = \nabla \vec{a}$ ,  $\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$  называются операциями первого порядка, так как связаны с первой производной. Повторным применением этих операций получают операции второго порядка. Таких операций всего пять:  $\text{div grad } u = \nabla \nabla u$ ,  $\text{div rot } \vec{a} = \nabla \nabla \times \vec{a}$ ,  $\text{grad div } \vec{a} = \nabla \nabla \vec{a}$ ,  $\text{rot grad } u = \nabla \times \nabla u$  и  $\text{rot rot } \vec{a} = \nabla \times \nabla \times \vec{a}$ . Две из этих операций обращаются в тождественный нуль.

**Упражнение.** Убедиться, что  $\text{div rot } \vec{a} = 0$ ,  $\text{rot grad } u = 0$ .

Раскроем оставшиеся три операции второго порядка.

$$\begin{aligned}
 1. \operatorname{div} \operatorname{grad} u &= \nabla \nabla u = \\
 &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) = \\
 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u = \nabla^2 u, \text{ где } \Delta - \text{ оператор}
 \end{aligned}$$

Лапласа.

$$\begin{aligned}
 2. \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} &= \nabla \nabla \vec{a} = \\
 &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = \\
 &= \left( \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z} \right) \vec{j} + \\
 &+ \left( \frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}.
 \end{aligned}$$

3. Двойное векторное произведение  $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$  раскрывается по правилу «бац минус цаб», т.е.

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} (\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a}, \vec{b}). \quad (11)$$

Применим это правило для раскрытия последней операции  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \nabla \times \vec{a} = \nabla (\nabla \vec{a}) - \vec{a} (\nabla \cdot \nabla) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$ .

Пусть  $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$ , тогда, согласно (7)

$$a_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}. \quad (12)$$

Поскольку  $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div} \vec{a}$ , то подставляя координаты (12) в (9), получим выражение оператора Лапласа в криволинейных координатах

$$\begin{aligned}
 \Delta \varphi &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \times \\
 &\times \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right) \right). \quad (13)
 \end{aligned}$$

В частном случае цилиндрической системы координат  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,  $z = z$  ( $u_1 = \rho$ ,  $u_2 = \theta$ ,  $u_3 = z$ ). Вычислим по формуле (3) коэффициенты Ламе и запишем оператор Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (14)$$

**Упражнение.** Записать оператор Лапласа в сферической системе координат.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Глава 1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.</b>	
<b>Элементы линейной алгебры.....</b>	<b>3</b>
§ 1. Расширение понятия числа. Комплексные числа, действия над ними.....	3
§ 2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.....	6
§ 3. Понятие матрицы и определителя. Свойства определителей.....	10
§ 4. Геометрические векторы, линейная зависимость, базис.....	17
§ 5. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.....	22
§ 6. Уравнение плоскости.....	29
§ 7. Уравнение прямой в пространстве и на плоскости.....	32
§ 8. Плоские кривые второго порядка.....	35
§ 9. Поверхности второго порядка.....	42
§ 10. Действия над матрицами. Обратная матрица ...	46
§ 11. Методы решения СЛАУ: матричный и Гаусса ....	50
§ 12. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.....	54
§ 13. Условия совместимости СЛАУ.....	57
§ 14. Структура общего решения СЛАУ.....	59
§ 15. Понятия матричного, линейного и нормированного пространств.....	64
§ 16. Базис и размерность линейного пространства....	69
§ 17. Эвклидово пространство.....	72
§ 18. Прямая и гиперплоскость в эвклидовом пространстве.....	77
§ 19. Корни алгебраического многочлена. Разложение многочлена на множители.....	79



§ 20. Разложение рациональной дроби на простейшие.....	85
<b>Глава 2. Введение в анализ</b> .....	<b>92</b>
§ 1. Некоторые свойства действительных чисел.....	92
§ 2. Предел последовательности.....	95
§ 3. Предел функции .....	98
§ 4. Бесконечно малые и их свойства.....	101
§ 5. Основные теоремы о пределах .....	102
§ 6. Замечательные пределы.....	105
§ 7. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва.....	108
§ 8. Свойства непрерывных функций .....	114
§ 9. Сравнение функций. Асимптотические равенства.....	117
<b>Глава 3. Дифференциальное исчисление функции одной переменной</b> .....	<b>120</b>
§ 1. Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной .....	120
§ 2. Производные основных элементарных функций.....	126
§ 3. Правила дифференцирования.....	129
§ 4. Дифференцирование векторной функции скалярного аргумента и параметрически заданной функции.....	133
§ 5. Дифференциал. Правила нахождения дифференциала .....	138
§ 6. Производные и дифференциалы высших порядков.....	141
§ 7. Теорема Ферма, Ролля, Коши и Лагранжа .....	145
§ 8. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей .....	149
§ 9. Формула Тейлора .....	152
§ 10. Асимптоты графика функции .....	157
§ 11. Точки экстремума функции. Интервалы возрастания и убывания.....	158
§ 12. Точки перегиба. Интервалы выпуклости и вогнутости .....	161

<b>Глава 4. Интегральное исчисление функции одной переменной</b> .....	167
§ 1. Неопределенный интеграл .....	167
§ 2. Замена переменной и интегрирование по частям ..	171
§ 3. Интегрирование рациональных функций .....	174
§ 4. Интегрирование тригонометрических функций ....	177
§ 5. Интегрирование некоторых иррациональностей...	179
§ 6. Определенный интеграл Римана.....	182
§ 7. Некоторые свойства определенного интеграла.....	187
§ 8. Методы вычисления определенного интеграла.....	190
§ 9. Некоторые приложения определенного интеграла.....	195
§ 10. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.....	201
§ 11. Несобственные интегралы от неограниченных функций .....	205
§ 12. Приближенное вычисление определенных интегралов .....	210
<b>Глава 5. Числовые и функциональные ряды</b> .....	213
§ 1. Числовые ряды .....	213
§ 2. Ряды с неотрицательными членами .....	216
§ 3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости ряда.....	222
§ 4. Функциональные последовательности и ряды.....	225
§ 5. Степенные ряды .....	230
<b>Глава 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных</b> .....	237
§ 1. Функция многих переменных. Основные понятия...	237
§ 2. Предел, непрерывность, частные производные .....	240
§ 3. Дифференцируемые функции, дифференциалы высших порядков.....	244
§ 4. Производные сложной и неявно заданной функции .....	248
§ 5. Производная по направлению, градиент .....	252

§ 6. Формула Тейлора.....	255
§ 7. Экстремум функции.....	258
§ 8. Условный экстремум функции.....	264
<b>Глава 7. Линейная алгебра.....</b>	<b>269</b>
§ 1. Понятие линейного оператора.....	269
§ 2. Действия над операторами. Свойства.....	271
§ 3. Матрица линейного оператора.....	273
§ 4. Преобразование вектора и матрица при переходе к новому базису.....	277
§ 5. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.....	279
§ 6. Жорданова форма матрицы.....	283
§ 7. Функции от матриц.....	289
§ 8. Функциональные матрицы.....	294
<b>Глава 8. Обыкновенные дифференциальные уравнения.....</b>	<b>298</b>
§ 1. Основные понятия.....	298
§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Частное, общее и особое решение.....	301
§ 3. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.....	304
§ 4. Линейное уравнение первого порядка. Уравнение Бернулли.....	307
§ 5. Уравнение в полных дифференциалах.....	309
§ 6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Методы понижения порядка.....	311
§ 7. Система дифференциальных уравнений.....	315
§ 8. Линейная однородная система. Структура общего решения.....	319
§ 9. Неоднородная линейная система. Структура решения.....	323
§ 10. Линейная система с постоянными коэффициентами.....	325
§ 11. Линейные дифференциальные уравнения $n$ -го	

порядка с постоянными коэффициентами .....	328
§ 12. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами со специальной функцией $g(x)$ .....	333
§ 13. Колебания математического маятника. Собственные и вынужденные колебания .....	336
§ 14. Типы точек покоя .....	339
§ 15. Понятие устойчивости по Ляпунову .....	342
§ 16. Понятие о краевых задачах ОДУ .....	345
§ 17. Решение ОДУ с помощью степенных рядов .....	346
§ 18. Приближенные методы решения ОДУ .....	348
<b>Глава 9. Кратные интегралы. Элементы векторного анализа</b> .....	<b>351</b>
§ 1. Определения кратных интегралов. Свойства .....	351
§ 2. Вычисление двойного и тройного интегралов в декартовой системе координат .....	354
§ 3. Двойной интеграл в полярной системе координат .....	359
§ 4. Тройной интеграл в цилиндрической и сферической системах координат .....	361
§ 5. Замена переменных в кратных интегралах .....	364
§ 6. Криволинейны интегралы .....	369
§ 7. Поверхностные интегралы .....	371
§ 8. Понятие скалярного и векторного полей .....	375
§ 9*. Векторные операции в криволинейных координатах .....	379
<b>Содержание</b> .....	<b>384</b>

**Фирсов Иван Парфенович  
Цирулик Владимир Григорьевич  
Сапунцов Николай Евгеньевич  
Клово Александр Георгиевич  
Гадельшин Валерий Камельянович**

# **КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

**по**

**курсу высшая математика**

**(I часть)**

**ЛР №020565**

Подписано к печати 15.03.99.

Бумага офсетная.

Усл. п. л. – 24,25.

Тираж 500 экз.

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Печать офсетная.

Уч-изд. л. – 24

Заказ № 185

«С»

---

Издательство Таганрогского государственного  
радиотехнического университета, ГСП – 17А,  
Таганрог-28, Некрасовский пер, 44  
Типография Таганрогского государственного  
радиотехнического университета ГСП-17А,  
Таганрог-28, Энгельса, 1.